序數效用革命的頭號戰犯

序數主義者眼中邏輯謬誤的常識性邊際效用互補性定義

林忠正*
中央研究院經濟所研究員
國立政治大學財政系教授
國立交通大學經營管理研究所教授
台北市南港區(115-41)研究院路 2 段 128 號
中央研究院經濟所
電話: 886-2-2782-2791 轉 507
電子信箱: cclin@econ.sinica.edu.tw

開始撰稿-2015年11月21日
完稿時間-2015年12月31日
列印時間-2016年2月3日

*謝謝林曉珮助理非常有效率的協助，也很謝謝政大財政所江若妘同學的細心校稿。

序數效用革命的頭號戰犯

序數主義者眼中邏輯謬誤的常識性邊際效用互補性定義

[摘要] 這篇文章運用五種簡單的數學表述方式，來說明「Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto 交叉邊際效用變化方向的互補性定義」在序數效用與基數效用兩種現代主要效用理論中的尷尬地位。序數效用的分析架構中不能容許「Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto 交叉邊際效用變化方向的互補性定義」有任何容身之處，這種不能包容簡單正常心理法則的序數效用理論，被批評是一種「截肢」或「把效用可衡量的骯髒洗澡水與邊際效用的真實嬰兒一起倒掉」的怪異理論。基數效用可以提供「Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto 互補性定義」棲身之地，但基數效用是如長度一樣是一種相當強烈的可衡量的概念,效用可衡量一直被認定為一種不切實際的落伍的標誌。Samuelson (1938) 甚至以「無限地不可能的」(infinitely improbable)的極端負面字眼來傳達他對基數效用理論的評價,因為在真實人生中構成基數效用所需添加的假設或公設出現的機率幾乎為零。現代兩種主要效用理論，序數理論違反互補性的常識定義，基數理論違反效用不可測性，各有嚴重的缺失。由於效用理論是個體選擇理論的根基，個體選擇理論是現代其他經濟理論的基礎，位於經濟學個體選擇理論最根基性的效用理論存在重大缺陷,這表示現代龐大的經濟理論體系是建構在不穩定的地基之上。而如何建構一套具有這兩種效用理論的優點而無其缺點的兩全其美的新效用理論的任務，仍然沒有眾所周知的明顯進展，甚至看來是一項不可能實現的任務。此文的目的很單純，主要希望運用多種簡單的數學表述方式，來幫助不熟悉此問題的讀者深刻地了解與體認到現代效用理論與個體理論所面對的基本困境。

JEL 分類: B120, B130, B210, D010

關鍵詞：序數、基數、邊際效用、替代互補

但這個認知或認同導致了一個非常尷尬的兩難困境。當效用僅可以以內含程度或強度的性質進入經濟學的方程式時，如果U 是效用的一個序數指標，那麼U 的任何單調轉換將必須擁有相同的權利作為另一個(相同的)指標。但是，當我們選擇任意一個函數$F(u)$，它只受到條件 $F' > 0$ 的限制，接著我們會發現…二階導數在轉換後，不一定能給出相同的方向(符號)。實際上，這些關係式...一般而言只有當$F'' = 0$時才會同時存在。但是，F 的選擇受到這樣一個嚴格的限制會使得效用的序數性質當然變得毫無意義。如果這種限制是有效的，我們其實應該就會擁有一個可以基數測量的效用…所導致的明顯後果是，要不是說當我們在傳統意義上談到遞減的邊際效用和互補性時是在胡謅，就是說我們（非法地）假設效用具備一個基數的衡量方式。乍看之下(Prima facie)這種脫節不是很合理的。

—Bernardelli (1952)

1. 難以理解的現代經濟學的互補性定義

嘗試去問一些還沒有受過現代經濟理論洗禮或洗腦的人，他會怎樣定義兩個商品之間的替代與互補性關係。一個最可能的常識性答案：應該是一項商品的持有數量增加會提高所關注商品的邊際效用，此時數量增加的商品可稱為所關注商品的互補品。同理，一項商品的持有數量增加會降低所關注商品的邊際效用，則數量增加的商品可稱為所關注商品的替代品。類似地，一項商品的持有數量增加不會影響所關注商品的邊際效用，則數量增加的商品可稱為所關注商品的獨立品。

事實上，回顧經濟思想的相關文獻記載，人類社會中早期的經濟學家在思考互補品與替代品的意義時，所提出的正式的學術上的互補性與替代性的數學公式定義，就是上述的一般人的直覺定義。此定義在經濟文獻中的記載是由 Auspitz 與 Lieben 率先提出，而知名的學者 Edgeworth 與 Pareto 也接受與採用此定義。因此對文獻熟悉的學者會稱之為 Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto 的互補性定義(在後續的論述中有時會以「ALEP 互補性定義」的簡稱來表述)，對文獻比較不熟悉的學者可能會稱它為 Edgeworth-Pareto 的互補性定義(簡稱「EP 互補性定義」)。

但是，你知道且會相信嗎？現在主流的個體經濟學理論正式且嚴謹地強烈主張，你不可以那樣定義互補性與替代性。

為什麼呢？

客氣地說，因為上述一項商品持有數量增加會提高所關注商品的邊際效用為互補品的定義，與現代流行的序數總效用理論的核心精神不能相容。序數總效用理論主張效用數值只有總效用的相對大小次序有意義，總效用差值的相對大小都無意義。建立在交叉邊際效用變化率的互補性定義於是變成無意義的概念,不能在序數效用理論中加以應用。

不客氣地說，一些極端的序數效用主義者認為「一項商品的持有數量增加會提高所關注商品的邊際效用為互補品的定義」,是一種錯誤的經濟直覺、是一種錯誤的常識、是一種錯誤思維邏輯下的產物，是一種不科學的落伍的標誌，從而不能在現代充滿科學性的美好經濟理論中現身。

例如，Silberberg (1978)在其知名的數理經濟學教科書《經濟學的結構：數學分析》(*The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*)中，就非常嚴厲地批評上述直覺的互

補性定義：

> 「與此類似，經濟學家曾經以邊際效用來定義互補或替代品：兩個商品被稱為互補如果消費更多的其中一種商品會提高另一種商品的邊際效用；反之為替代品。例如，有人認為，一個人增加餅乾(pretzels)數量會提高啤酒的邊際效用，因此啤酒和餅乾是互補的。上面的代數結果說明了為什麼這是一種邏輯謬誤的推理方式。(The algebra above shows why this reasoning is fallacious.)此定義被考慮的條件是 $\partial U_i / \partial x_j = U_{ij} = U_{ji}$。但如果 $U_{ij} > 0$，譬如說，某一單調轉換使得 $\partial V_i / \partial x_j = V_{ij} < 0$，所以其符號與 U_{ij} 的符號相反。這意味著於需求關係中，兩種狀況會被觀察到的相同的行為表現。這個定義不能用來分類可觀察到的行為，因此，是無用的。(Hence this definition is incapable of categorizing observable behavior and is thus useless.)」

特別注意，Silberberg (1978)所強調的兩句話：「上面的代數結果說明了為什麼這是一種邏輯謬誤的推理方式」與「這個定義不能用來分類可觀察到的行為，因此，是無用的。」這就是不符合其理論特性的常識概念就是錯誤概念的極端想法。有時候，我們或許應該更謙虛一些，要想想是否有時候會出現其實是違反常識的理論是錯誤理論的可能性。

你去翻閱當今的個體經濟學教科書，你找不到上述直覺的互補性定義。但你可以找到「以 x 商品的價格提高對 y 商品的需求數量的增減來定義互補品與替代品」的概念，以及更精緻的或虛幻的「以 x 商品的價格提高在所得受到補償以維持在同樣的效用水準下，y 商品的需求數量的增減來定義互補品與替代品」的概念。

這是非常奇怪的事，我是指對一般正常的人而言，而不是對已深受經濟學洗禮或洗腦的人而言，要定義蘋果與橘子是替代品，或咖啡與牛奶是互補品，這種 Samuelson (1974)所說的「每位小學生都知道的事」(What Every Schoolboy Knows)。為何不能直接由該兩項商品的關係直接定義，而必須牽涉到商品的價格，甚至還要牽涉到「所得受到補償以維持在同樣的效用水準下」的不自然概念來加以定義，難怪身為序數效用主義大將的 Samuelson (1974)曾自我諷刺序數效用主義者說：

> 如果我們想要描述這種新的程序(定義)給維根斯坦所教的奧地利學生，他們會驚訝地得知，這種屬於他們的後 Pareto 概念的論述究竟是怎麼一回事。經濟博士生可能流露出同樣的驚愕表情。「什麼？」他們會問，「想要去發現茶和檸檬是互補品，我必須在貨幣所得或其他一種或一些商品的『補償性』變化之下追蹤它們的價格或數量的變化？上帝保佑我的靈魂，我從來沒有懷疑過。請問，這是為什麼呢？」[1]
>
> 其實，如果你竊聽研究生教室或偷窺中級和高級經濟理論的書籍，你必定在學習為什麼會採取如此的定義方式的原因時遭遇到一些困難。

如果你平常沒有如 Samuelson 一樣，會細心地關注經濟學研究生在談論些什麼，也不關心教科書中的基礎經濟概念合不合理，則你可能一直沒有清楚發覺現代經濟理論所採用的互補性定義的確是很怪異的。若真如此，不要訝異，我認識的經濟學者很少有人會注意到此怪異性，我自己以前也沒有清楚察覺此問題。

藉由上述的解說，突然間，你頓悟到這真是太離譜了！突然發現自己這麼認真地研究經濟學如此之久了，怎麼可能都沒有注意到這麼顯著而明確的事呢？怎麼都沒有老師、同學、同事以及教科書提點我注意這麼重要的事情呢？

好吧，先收拾起驚訝的心情，我們要非常理智地，討論這怪異現象背後真正的原因。

為什麼教科書會這樣處理互補性問題呢？為何 Silberberg (1978)會大膽地提出這樣強勢的批評呢？為什麼 Samuelson (1974)會如此感慨呢？這到底是為什麼?為什麼這麼自然的、正常的、熟悉的習慣性概念竟然如此罪大惡極，為何這些概念被標誌著落伍的、違反科學精神的標籤，為何這些概念在現代主流經濟學理論中是無意義的概念呢？

若要救回「ALEP 互補性定義」，可以怎樣做呢？並且，要因此付出怎樣的代價呢？

2. 為何「ALEP 互補性定義」與序數效用概念是先天宿敵

為什麼「ALEP 互補性定義」會變成序數效用革命的頭號敵人呢？言簡意賅地說，

[1] The same astonishment might be registered by most in-laws of economic Ph.D.'s. “What?” they will ask, “to discover that tea and lemon are complements must I accompany any change in their prices or quantities by a ‘compensating’ change in money income or in some other good or goods? Bless my soul, I'd never have suspected that. Pray, why?”

Hicks-Allen 需求理論革命是起因於，Allen 在 1934 年發現，當時經濟學家所採用的「ALEP 互補性定義」與 Pareto 得自無異曲線特性的序數效用概念無法相容。要往建構一套進步的序數效用的個體選擇理論大道邁進時,第一個要克服的路障就是交叉邊際效用的互補品定義，此定義也就變成序數效用革命的頭號敵人。

「消費者在預算限制下極大化總效用的基本分析架構」一直是經濟學家分析個體選擇行為的基本分析典範。在此分析架構中所謂的效用，有兩種現代詮釋，一種是序數效用，一種是基數效用。本文討論這兩種主要效用概念與「ALEP 互補性定義」一些出乎意料之外的互斥關係。

序數效用的**「第一個假設」**是經濟個體有能力對不同的選項組合進行偏好或效用排序。一個序數效用函數經過任何正向單調轉換(monotonic transformation)後所對應的新函數還是可以維持或表示原來的偏好次序。序數效用數值大小只有排序大小的意義，這是一種很好的效用概念。但正向單調轉換前後的不同的效用函數此時所各自對應的總效用交叉二次導數(二次微分項)的正負符號可能不同，無法維持恆定，在序數效用理論的架構中因此不能容許邊際效用遞減法則與「ALEP 互補性定義」有任何生存餘地。

例如，有些經濟學家如 Allen 和 Hicks 因此主張放棄邊際效用遞減法則與「ALEP 互補性定義」,而尋找其他的互補性定義，就如我們現在教科書裡所學到的「*x* 商品價格提高會增加 *y* 商品需求量是替代品」的定義。他們認為此概念有立基於市場可觀察行為的優點，不需要依賴建立於心理內省的考量，因此被推崇為是可以添增序數效用理論光彩而不是使之失色的科學性定義。

然而，還是有不少經濟學家不贊同序數效用理論必須排斥邊際效用遞減法則與「ALEP 互補性定義」,他們認為這是非常符合簡單心理常識的概念，不可能是一種錯誤思維方式的產物。

Bernardelli (1938)就曾說：

> …舊的 Edgeworth-Pareto 的互補性定義…有一個完美的簡單的心理意義。當它似乎不適合數學效用分析的傳統分析工具時，不是貿然得出結論認為它是「毫無意義的」(senseless),反而應該已經得出的結論是，指出某人的方法是錯的。

序數效用理論不能容許「ALEP 互補性定義」(與邊際效用遞減法則)等合理概念有任何容身之所的缺點，促成了基數效用理論的發展與盛行。

基數效用的「**最基本的主張**」是個人有能力對不同選項組合進行偏好或效用排序(如序數效用理論)，除此之外，個人還有能力對任何兩個選項組合的變化或移轉的偏好或效用進行排序。一個基數效用函數經過任何正向線性轉換(positive linear transformation)所對應的新函數還是可以維持或代表原來的偏好次序。正向線性轉換前後的效用函數所各自對應的總效用二次導數(微分項)的正負符號可以維持不變，所以基數效用理論提供「ALEP 互補性定義」(交叉二次導數為負)容身之處。但是，這個容身空間真的是小到不能再小的只能立足的立錐之地的狹小空間。並且，正向線性轉換就是公分與公尺等長度概念所具有的基本性質，基數效用正向線性轉換的特性因此隱含個人有能力分辨任何兩個效用值的差異(類似長度)的比例，此時效用變成一種相當強烈的可衡量的概念。效用可衡量一直被認為是一種落伍的不切實際的標誌。

更重要地，藉由明確的數學證明，Samuelson (1938)很肯定地且很有說服力地指出，在真實人生中構成基數效用所需添加的假設或公設出現的機率幾乎為零，因此以「無限地不可能的」(infinitely improbable)極端負面字眼來傳達他對基數效用理論的論斷。

序數與基數兩種現代的主要效用理論不能合理地容納正常的互補性定義，顯示這兩項主要理論各自有嚴重缺陷。並且無窮不可能的效用可衡量的基數效用理論在序數效用革命之後還在總體經濟學與成長理論等領域被廣泛地應用的事實，明確地顯示由Pareto、Slutsky、Allen、Hicks、Samuelson 以及其他很多參與基礎理論建構與討論的偉大經濟學家，所發動與鼓吹的序數總效用理論，並沒有真正成功地實現序數效用革命的長期夢想或理想。

如何建構一套具有兩種效用理論的優點而無其缺點的新的兩全其美理論的任務，一種可以提供「ALEP 互補性定義」與邊際效用遞減法則等正常概念有合理的寬廣的容身之所的序數效用理論，同時使得效用可衡量的基數效用理論在個體選擇理論(不含跨人際比較的福利經濟學)沒有任何存在空間的新理論，一直沒有眾所周知的重要進展，看來還是一項不可能達成的任務。

當時參與序數與基數效用理論相關爭論的 Bernardelli (1938)就曾感慨地指出：「心理測量問題及其對經濟理論的影響至今已被證明是最令人費解的謎團之一」(the problem of psychological measurement and its bearing on economic theory so far has proved to be one of the most puzzling riddles)。Lancaster (1953) 甚至強調說:「這件事不論 Bernardelli 博士或其他任何人都是無能為力的。」其實，不只在此理論草創之時這是最大的一個謎團，這個謎團至今還未被成功地破解。

現代個體經濟理論與強調個體基礎的總體理論，因此是建構在很不完美的不穩定根基上。有一些經濟學家並不清楚自己所應用的經濟理論究竟是序數效用理論或是基數效用理論，另有一些經濟學家不知道兩種效用理論各自有如此重大的缺陷。因此，正如 Bernardelli (1952)所說的：他們自己並不知道「**他們真正在做什麼事。事實上，所有作者一直硬將經濟學的問題強迫性地塞入偏好尺度和邊際替代率的緊身衣中**」。

在接下來的簡單模型中，我運用五種數學表述方式，說明「ALEP 互補性定義」在現代序數與基數兩種主要效用理論中的尷尬角色，以彰顯為何「ALEP 互補性定義」在這兩種效用理論之中難覓合宜的棲身之所的癥結點。而如何建構一項兩全其美的效用理論，即能提供「ALEP 互補性定義」一個合理的容身之地的序數效用理論，在後續的文章中我會加以介紹。

3. 序數效用理論與 ALEP 互補性定義是先天宿敵

如前所述，序數效用的「第一個假設」是經濟個體有能力對不同的選項組合進行偏好或效用數值大小排序。一個序數效用函數經過任何正向單調轉換後，所對應的新函數還是可以維持與代表原來的偏好次序。但單調轉換前後的效用函數所各自對應的二次導數(二次微分項)的正負符號無法維持恆定不變，所以在序數效用理論的架構中無法提供「ALEP 互補性定義」有任何表現的機會。

我們應用一些簡單的數字性、方程式與數學模型，清楚地呈現這些相關的論述的核心精神。

3.1 特殊數據性的例子

我先舉一個相當容易理解的數據性例子，說明為何交叉邊際效用的互補性定義與序數效用的核心概念是先天宿敵的緣故。

如果你對(5 顆蘋果，0 顆橘子)的偏好超過(4 顆蘋果，0 顆橘子)，對(4 顆蘋果，0

顆橘子)的偏好超過(3 顆蘋果，0 顆橘子)，對(3 顆蘋果，0 顆橘子)的偏好超過(2 顆蘋果，0 顆橘子)，對(2 顆蘋果，0 顆橘子)的偏好超過(1 顆蘋果，0 顆橘子)。你可以用由小而大的(1,2,3,4,5)的總效用數列來表示上述的偏好次序，此時蘋果邊際效用為(1,1,1,1)。

現在有朋友送給你一顆橘子，而你對(5 顆蘋果，1 顆橘子)的偏好超過(4 顆蘋果，1 顆橘子)，對(4 顆蘋果，1 顆橘子)的偏好超過(3 顆蘋果，1 顆橘子)，對(3 顆蘋果，1 顆橘子)的偏好超過(2 顆蘋果，1 顆橘子)，對(2 顆蘋果，1 顆橘子)的偏好超過(1 顆蘋果，1 顆橘子)。依據相同次序的數列都可以表示同一偏好關係的序數效用基本理念，此時，你可以用由小而大的(2,3,4,5,6)的總效用數列來表示上述的偏好次序，此時蘋果邊際效用為(1,1,1,1)。

為獲得橘子變動後蘋果邊際效用的變化情況，即交叉邊際效用的數值正負，我們必須比較橘子由 0 顆增加到 1 顆前後兩種蘋果邊際效用的變化方向，橘子變動前的原先總效用數列(1,2,3,4,5)對應的蘋果邊際效用為(1,1,1,1)，橘子變動後總效用數列(2,3,4,5,6)對應的蘋果邊際效用還是為(1,1,1,1)，所以(橘子-蘋果的)交叉邊際效用是後一個邊際效用數列(1,1,1,1)減前一個邊際效用數列(1,1,1,1)而得到(0,0,0,0)，即(橘子-蘋果的)交叉邊際效用為零。在「交叉邊際效用為正是互補品，交叉邊際效用為負是替代品，交叉邊際效用為零是獨立品」的定義之下，這隱含此商品為獨立品。

現在我們準備好了，可以對橘子增加前後所構成的總效用數列，即橘子變動前的原先總效用數列(1,2,3,4,5)與橘子變動後總效用數列(2,3,4,5,6)，進行**正向單調轉換**，以檢視此總效用數列所對應(橘子-蘋果)的交叉邊際效用為零(橘子是蘋果的獨立品)的特性，在**正向單調轉換**之後會發生改變或維持恆定？以判斷「交叉邊際效用為正是互補品，交叉邊際效用為負是替代品，交叉邊際效用為零是獨立品」的定義，是否具有序數效用的基本性質單調轉換後能維持不變的特性。

首先，若我們對原兩個總效用數列(1,2,3,4,5)與(2,3,4,5,6)，進行取平方數的單調轉換，使它們變成(1,4,9,16,25)與(4,9,16,25,36)。此時，兩者對應的邊際效用分別變成(3,5,7,9)與(5,7,9,11)。

我們也準備好了，可以檢視正向單調轉換(在此為取平方數)前後，先後兩種總效用數列所對應(橘子-蘋果的)的交叉邊際效用為零(橘子是蘋果的獨立品)的特性，會發生改變或維持恆定了？

我們必須比較但單調轉換下橘子由 0 顆增加到 1 顆兩種蘋果邊際效用的變化方向，單調轉換下橘子變動前的原先總效用數列(1,4,9,16,25)對應的蘋果邊際效用為(3,5,7,9)，橘子變動後總效用數列(4,9,16,25,36)對應的蘋果邊際效用為(5,7,9,11)，所以(橘子-蘋果的)交叉邊際效用是後一個邊際效用數列(5,7,9,11)減前一個邊際效用數列(3,5,7,9)而得到(2,2,2,2)，即(橘子-蘋果的)交叉邊際效用為正。這隱含橘子是蘋果的互補品。也就是，經過正向單調轉換(在此為取平方數)後，對於同一個人，也就是，對於同一偏好的相同的人，對他而言從橘子是蘋果的所得的獨立品變成互補品。這當然是不可接受的理論轉變或突變，所以說「交叉邊際效用為正是互補品」等定義，與序數效用的效用數值只能排序大小的核心理念是不能並存的，是一不完美的理論。

其次，若我們對原兩個總效用數列(1,2,3,4,5)與(2,3,4,5,6)，進行取開根號的單調轉換，使它們變成$(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5})$與$(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6})$。此時，兩者對應的邊際效用分別變成$(\sqrt{2}-1,\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{4}-\sqrt{3},\sqrt{5}-\sqrt{4})$與$(\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{4}-\sqrt{3},\sqrt{5}-\sqrt{4},\sqrt{6}-\sqrt{5})$，即接近(0.4142, 0.3178, 0.2679, 0.2361)和(0.3178, 0.2679, 0.2361, 0.2134)。

此時我們再次準備好了，可以檢視正向單調轉換(在此為取開根號)前後，先後兩種總效用數列所對應(橘子-蘋果)的交叉邊際效用為零(橘子是蘋果的獨立品)的特性，會發生改變或維持恆定了？

我們必須比較單調轉換下橘子由 0 顆增加到 1 顆兩種蘋果邊際效用的變化方向，單調轉換下橘子變動前的原先總效用數列$(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5})$對應的蘋果邊際效用為$(\sqrt{2}-1,\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{4}-\sqrt{3},\sqrt{5}-\sqrt{4})$，橘子變動後總效用數列$(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6})$對應的蘋果邊際效用為$(\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{4}-\sqrt{3},\sqrt{5}-\sqrt{4},\sqrt{6}-\sqrt{5})$，所以(橘子-蘋果的)交叉邊際效用是後一個邊際效用數列$(\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{4}-\sqrt{3},\sqrt{5}-\sqrt{4},\sqrt{6}-\sqrt{5})$減前一個邊際效用數列$(\sqrt{2}-1,\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{4}-\sqrt{3},\sqrt{5}-\sqrt{4})$而得到$(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1,\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2},\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3},\sqrt{6}-2\sqrt{5}+\sqrt{4})$，此數列數據接近(-0.0946, -0.0500, -0.0319, -0.0227)，即(橘子-蘋果的)交叉邊際效用為負。這隱含橘子是蘋果的替代品。也就是，經過正向單調轉換(在此為取開根號)後，對於同一個人，也就是，對於同一偏好的相同的人，對他而言從橘子是蘋果的所得的獨立品變成替代品。這當然是不可接受的理論轉變或突變，所以我們說「交叉邊際效用為正是互補品」等定義，與序數效用的效用數值只能排序大小的核心理念是不能並存的，是一個連簡單的心理法則都無法涵蓋的不完美的理論。

以上的舉例，清楚地展現可以用來描述相同偏好關係的不同新總效用數列，分別對應的交叉邊際效用的正負符號，有些為零、有些是正、有些是負。從而交叉邊際效用正負符號的概念，無法維持恆定。建立在其上的互補性定義，變得很尷尬，而顯得無處容身。這些概念在序數效用理論總效用數字只有大小次序有意義的主要大旗下，變成一種沒有恆定立場的幻想式、或變幻多端而難以掌握的概念，而變成一種無意義的且不科學的錯誤的思維方式。

這表示如果不放棄「交叉邊際效用正負的互補性定義」，則隱含「代表同一偏好的不同總效用數列可隱含不同的互補性與替代性的商品關係」，這顯然是一項互相矛盾而無法令人接受的論述。如果保留「交叉邊際效用正負的互補性定義」，則等於要放棄效用只能排序大小的「序數效用」的核心精神。「交叉邊際效用正負的互補性定義」與序數效用理論的「序數」的核心理念因而是無法相容的概念，這清清楚楚地展現了為何交叉邊際效用正負的互補性定義與序數總效用概念是先天宿敵的基本關鍵。

3.2 一般化效用函數形式

以一般化的數學方程式進行分析，可以更完整周全地呈現為何「ALEP 互補性定義」與序數總效用概念是先天宿敵的根本癥結。我們先寫下正向單調轉換的關係式

(1) $$V(x,y)=F(U(x,y)); \quad F'>0, F''\gtrless 0$$

其中，x 和 y 是消費者所面對的兩個選項。通常我們以 x 表示商品 x 的數量，而 y 表示消費者所想購買的另一種商品(或想保留的現金或所得)的多寡。$U(x,y)$ 與 $V(x,y)$ 是用來描述消費者對不同的商品數量組合 (x,y) 的偏好關係的總效用函數。$U(x,y)$ 是原先的總效用函數，而 $V(x,y)$ 為藉由 $F(U)$ 的正向單調轉換後所得到的新的總效用函數。正向單調轉換的特性反映在轉換函數 $F(U)$ 的一階導數為正 $F'(U)>0$ 的設定上。二階導數的正負則完全不會影響單調正向轉換的特性，所以 $F''\gtrless 0$。單調正向轉換前後的總效用數列數據的大小次序相同，$U(x,y)$ 與 $V(x,y)$ 因此代表相同的偏好，這是序數效用理論的基本教條。正如 Varian (1996)所強調的：「一個效用函數的單調轉換是一個與原始效用函數具有相同偏好的效用函數(a monotonic transformation of a utility function is a utility function that represents the same preferences as the original utility function)」。事實上，可以用來描述同一偏好的總效用數列有無窮多個，每一個又都可以進行無窮多種的單調轉換，因此序數效用具有一種非常低程度的效用可衡量性，準確地說，這是一種「序數可衡量」(ordinal measurability)的概念。

對總效用$U(x,y)$進行正向單調轉換使它變成$V(x,y)$之後，會衍生出以下的關係式：

(2) $$V_x = F'U_x,\ V_y = F'U_y$$

(3) $$V_{xx} = F'U_{xx} + F''U_xU_x,\ V_{yy} = F'U_{yy} + F''U_yU_y$$

(4) $$V_{xy} = F'U_{xy} + F''U_xU_y,\ V_{yx} = F'U_{yx} + F''U_yU_x$$

因為$F'' \gtrless 0$皆可，若原總效用函數$U_{xx} < 0$邊際效用遞減，在$F'' > 0$的條件下，則新總效用函數可以$V_{xx} \gtrless 0$，即新的邊際效用可以是遞減、常數或遞增。換句話說，我們可以獲得$signV_{xx} \neq signU_{xx}$、$signV_{yy} \neq signU_{yy}$的結果，即正向單調轉換前後的總效用函數所對應的純粹二階導數的數值正負符號可能不同。邊際效用遞減與序數效用概念因此是互相排斥的概念。

同理，在此，我們關注的焦點是$signV_{xy} \neq signU_{xy}$、$signV_{yx} \neq signU_{yx}$的結果，即正向單調轉換前後的總效用函數所對應的交叉二階導數的數值正負符號可能不同。「交叉邊際效用正負的互補性定義」與序數效用概念因此彼此是天敵無法共存。面對尖銳的兩難而必須進行痛苦的取捨，不是必須放棄「交叉邊際效用正負的互補性定義」，就必須放棄序數效用的核心概念。

3.3 特殊效用函數形式

為加深不熟悉此研究題材讀者的印象，再加碼以三個特殊的效用函數來加以解釋。

我所設計的三個特殊的效用函數分別是：

(5-A) $$U^1(x,y) = xy$$

(5-B) $$U^2(x,y) = \ln xy = \ln x + \ln y$$

(5-C) $$U^3(x,y) = (\ln x + \ln y)^{1/2}$$

這三個效用函數所對應的邊際效用雖然數值大小可能不同，但都是正值，它們分別是：

(6-A) $U_x^1 = y > 0$, $U_y^1 = x > 0$；邊際效用為正

(6-B) $U_x^2 = \frac{1}{x} > 0$, $U_y^2 = \frac{1}{y} > 0$；邊際效用為正

(6-C) $U_x^3 = \frac{1}{2x}(\ln x + \ln y)^{-\frac{1}{2}} > 0$, $U_y^3 = \frac{1}{2y}(\ln x + \ln y)^{-\frac{1}{2}} > 0$；邊際效用為正

它們所對應的邊際效用的變化率，分別是常數或遞減：

(7-A) $U_{xx}^1 = 0$, $U_{yy}^1 = 0$；邊際效用常數

(7-B) $U_{xx}^2 = -\frac{1}{x^2} < 0$, $U_{yy}^2 = -\frac{1}{y^2} < 0$；邊際效用遞減

(7-C) $U_{xx}^3 = -\frac{1}{2x^2}(\ln x + \ln y)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4x^2}(\ln x + \ln y)^{-\frac{3}{2}} < 0$

$U_{yy}^3 = -\frac{1}{2y^2}(\ln x + \ln y)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4y^2}(\ln x + \ln y)^{-\frac{3}{2}} < 0$；邊際效用遞減

這三個效用函數彼此是彼此的單調轉換函數，背後所表示的偏好次序是不變的，但其中一個的邊際效用變化率是常數，另外兩個是遞減。

它們所對應的交叉邊際效用正負，分別是：

(8-A) $U_{xy}^1 = 1 > 0$, $U_{yx}^1 = 1 > 0$；交叉邊際效用為正(互補品)

(8-B) $U_{xy}^2 = 0$, $U_{yx}^2 = 0$；交叉邊際效用為零(獨立品)

(8-C) $U_{xy}^3 = -\frac{1}{4xy}(\ln x + \ln y)^{-\frac{3}{2}} < 0$,

$U_{yx}^3 = -\frac{1}{4xy}(\ln x + \ln y)^{-\frac{3}{2}} < 0$；交叉邊際效用為負(替代品)

這三個彼此是彼此的單調轉換的效用函數，所對應的選項組合的效用數值次序維持不變，但其中一個的交叉邊際效用是正、一個是零、一個是負。

我們因此再次展示了用來表示同樣偏好的不同總效用函數，分別各自對應的純粹與

交叉二次微分項的正負符號可能有所不同。這表示若我們採取「ALEP 互補性定義」，則單調轉換後兩商品之間的替代與互補性關係無法維持恆定。這種替代與互補關係在序數效用理論中變成不合宜的定義方式。

3.4 特殊效用函數的決策模型

接著，以大家非常熟悉的「消費者在預算限制下極大化總效用」的三個特殊模型，呈現與說明序數效用單調轉換性質所衍生的進一步涵義：

(9-A) $$\max_{x,y} \quad U^1(x,y) = xy \quad s.t. \quad px + qy = M$$

(9-B) $$\max_{x,y} \quad U^2(x,y) = \ln xy = \ln x + \ln y \quad s.t. \quad px + qy = M$$

(9-C) $$\max_{x,y} \quad U^3(x,y) = (\ln x + \ln y)^{1/2} \quad s.t. \quad px + qy = M$$

這三個模型的邊際效用雖然數值不同但其正負符號都是正值，然而它們所對應的純粹的和交叉邊際效用正負符號有所不同。

在另一方面，這三個模型所對應的邊際替代率卻又是完全一樣的，它們分別是：

(10-A) $$MRS^1_{xy} = \frac{U^1_x}{U^1_y} = \frac{y}{x}$$

(10-B) $$MRS^2_{xy} = \frac{U^2_x}{U^2_y} = \frac{1/x}{1/y} = \frac{y}{x}$$

(10-C) $$MRS^3_{xy} = \frac{U^3_x}{U^3_y} = \frac{\frac{1}{2x}(\ln x + \ln y)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2y}(\ln x + \ln y)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{y}{x}$$

即使單調轉換前後的效用函數所各自對應的邊際效用的數值大小可能不同，各自對應的純粹邊際效用的變化率(遞增、遞減或常數)與交叉邊際效用的正負 (正數、零或負數)也可能不同。但是，邊際替代率或邊際效用的比值，不會因為效用函數經過單調轉換而發

生任何變化。

因為這三個模型的預算限制式完全一樣，因此，相同的邊際替代率自然隱含消費者最適化的一階條件，也完全一樣。即：

(11) $$MRS^{i}_{xy}=\frac{y}{x}=\frac{p}{q},\ \ i=1,2,3\ ;\ \ px+qy=M$$

因為三個消費者選擇模型的邊際替代率完全一樣，三個模型最適化的二階條件也完全一樣，無異曲線凸向原點的條件會成立，即 $\partial MRS^{i}_{xy}/\partial x=[x(\partial y/\partial x)-y(\partial x/\partial x)]/x^2=[x(-y/x)-y]/x^2=-2y/x^2<0$。

簡單的計算，可以了解這三個不同模型的需求函數的形式也完全一樣，即

(12) $$x^{*}=\frac{1}{2}\frac{M}{p}$$

(13) $$y^{*}=\frac{1}{2}\frac{M}{q}$$

分析至此，我們發現，在三個模型的效用函數彼此為彼此的正向單調轉換函數的前提下，因為單調轉換前後的效用函數不會改變偏好次序，即單調轉換前後的效用數值的相對大小不會發生改變，此時消費者均衡條件完全一樣，最適解(需求函數)完全一樣，表示同樣的消費決策與購買行為。雖然，不熟悉這項序數效用理論特色的讀者，會感到驚訝與特別關注的發現是：三個不同模型的交叉邊際效用一個正數、一個零、一個負數；並且邊際效用變化率一個為常數而兩個遞減。但這些怪異的不一致性質似乎是無關緊要的，因為看來我們已經能夠非常成功地描繪消費者選擇的最適均衡條件與最適選擇結果(實際購買數量)了。

3.5 一般化效用函數的決策模型

在此小節中，我們以一般化的消費者選擇模型來更準確地討論上述的分析結果。此時，我們可以假設，一位擁有財富或所得水準 M 元的消費者，在面對單位價格是 p 元的 x 商品，以及單位價格是 q 元的 y 商品時，於 Slutsky-Hicks 的消費模型之下，如何決定購買多少數量的 x 商品以及 y 商品(或保留多少現金)。

「消費者在預算限制下極大化總效用」的決策或思維方式，設定如下：

(14) $$\max_{x,y} \quad U(x,y); \quad U_x > 0, U_y > 0, \ s.t. \quad px + qy = M$$

最適化的一階條件要求：

(15) $$\frac{U_x(x,y)}{U_y(x,y)} = \frac{p}{q}$$

(16) $$px + qy = M$$

二階條件要求無異曲線凸向原點，即：

(17) $$H = q^2 U_{xx} - 2pqU_{xy} + p^2 U_{yy} < 0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：[2]

(18) $$x_M = \frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{-H} \gtrless 0$$

(19) $$y_M = \frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{-H} \gtrless 0$$

價格變動對購買數量的效果為：

(20) $$x_p = \frac{qU_y}{H} + x\frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{H} \gtrless 0$$

(21) $$y_p = -\frac{qU_x}{H} + x\frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{H} \gtrless 0$$

(22) $$x_q = -\frac{pU_y}{H} + y\frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{H} \gtrless 0$$

(23) $$y_q = \frac{pU_x}{H} + y\frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{H} \gtrless 0$$

正向單調轉換後的 Slutsky-Hicks 消費模型變成：

(24) $$\max_{x,y} \quad V(x,y) = F(U(x,y)); \quad F' > 0, \ s.t. \quad px + qy = M,$$

2 比較靜態分析的計算過程請見【附錄】的說明。

最適化的一階條件要求：

(25) $$\frac{V_x(x,y)}{V_y(x,y)}=\frac{p}{q}$$

(26) $$px+qy=M$$

二階條件要求無異曲線凸向原點，即：

(27) $$J=q^2V_{xx}-2pqV_{xy}+p^2V_{yy}<0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：

(28) $$x_M=\frac{qV_{xy}-pV_{yy}}{-J}\gtreqless 0$$

(29) $$y_M=\frac{pV_{xy}-qV_{xx}}{-J}\gtreqless 0$$

價格變動對購買數量的效果也會相等：

(30) $$x_p=\frac{qV_y}{J}+x\frac{qV_{xy}-pV_{yy}}{J}\gtreqless 0$$

(31) $$y_p=-\frac{qV_x}{J}+x\frac{pV_{xy}-qV_{xx}}{J}\gtreqless 0$$

(32) $$x_q=-\frac{pV_y}{J}+y\frac{qV_{xy}-pV_{yy}}{J}\gtreqless 0$$

(33) $$y_q=\frac{pV_x}{J}+y\frac{pV_{xy}-qV_{xx}}{J}\gtreqless 0$$

接著，我們證明單調正向轉換前後的分析結果會一樣。首先，單調正向遞增轉換前後的最適化一階條件完全相同，因為：

(34) $$\frac{V_x}{V_y}=\frac{F'U_x}{F'U_y}=\frac{U_x}{U_y}=\frac{p}{q}$$

這表示，單調正向遞增轉換後的最適化條件不變，即最適解的數值不變。

其次，由無異曲線分析法的基本特性來看，單調正向轉換前後的效用函數表示相同

的偏好，所獲得的分析結果**(總結果)**應該一樣才對。所以，我們應該可以證明單調正向轉換前後兩個模型的比較靜態分析的總效果或最後的結果會完全相同。

這證明過程非常簡單，我們的確可以證得它們各自所得變動對購買數量的效果相等，即：

$$x_M = \frac{qV_{xy} - pV_{yy}}{-J} = \frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{-H} \tag{35}$$

$$y_M = \frac{pV_{xy} - qV_{xx}}{-J} = \frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{-H} \tag{36}$$

價格變動對購買數量的效果為：

$$x_p = \frac{qV_y}{J} + x\frac{qV_{xy} - pV_{yy}}{J} = \frac{qU_y}{H} + x\frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{H} \tag{37}$$

$$y_p = -\frac{qV_x}{J} + x\frac{pV_{xy} - qV_{xx}}{J} = -\frac{qU_x}{H} + x\frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{H} \tag{38}$$

$$x_q = -\frac{pV_y}{J} + y\frac{qV_{xy} - pV_{yy}}{J} = \frac{pU_y}{H} + y\frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{H} \tag{39}$$

$$y_q = \frac{pV_x}{J} + y\frac{pV_{xy} - qV_{xx}}{J} = \frac{pU_x}{H} + y\frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{H} \tag{40}$$

其中，可證明 $J = q^2V_{xx} - 2pqV_{xy} + p^2V_{yy} = F'H < 0$ 。

因此我們藉由數學證明可發現總效用函數經過單調正向轉換後，不會影響消費者的均衡條件，也不會影響比較靜態分析的整體的或最後的結果。這就驗證了無異曲線分析法的基本特性，也就是單調正向轉換前後的效用函數，表示相同的個人偏好。既然是代表相同的偏好，因此也應該隱含相同的個人行為。

就如 Varian (1996) 所強調的：「在幾何上，一項效用函數是一種標記無異曲線的方法。因為在同一條無異曲線上的每個組合一定具有相同的效用，一個效用函數是以位置愈高的無異曲線得到愈大的指定數字的方式來指定給不同的無異曲線不同的數字。從此觀點來看，單調轉換只是重新標記無異曲線。只要包含愈喜歡商品組合的無異曲線比包含愈不喜歡商品組合的無異曲線得到一個較大的標記，則這些標記都將會代表相同的偏

好。」[3]也因此不會改變消費者的最佳決策。

3.6 進步的完美理論或不合常識的錯誤理論

這一切看起來很完美，序數效用理論看來似乎就足夠建構出合理的消費理論了。

因此有些經濟學家認為既然拋棄邊際效用遞減法則與「ALEP 互補性定義」，序數效用理論還是足以獲得一致性的消費者均衡條件與建構完整的消費理論，序數效用理論當然是足夠好的理論。邊際效用遞減法則與「ALEP 互補性定義」因此是多餘的、無意義的概念。何況邊際效用遞減法則與「ALEP 互補性定義」是一種不可客觀觀察的心理法則，棄置不可觀察的主觀心理法則，應該被認為是一種理論進步的標誌。

然而，事實上，有很多經濟學家不同意這種看法，他們認為邊際效用遞減法則與「ALEP 互補性定義」，是古典經濟學前輩的理論的精華與核心精神，是合情合理的心理現象。

有些經濟學家為克服序數效用這些缺點，於是轉身投身於不同的效用概念的陣營—基數效用理論的陣營。

4. 基數效用理論對 ALEP 互補性定義代價昂貴的救援

基數效用的**「最基本的主張」**是個人有能力對不同選項組合與任何兩個選項組合的變化進行偏好或效用排序。一個基數效用函數經過任何正向線性轉換後所獲得的新函數可以描述相同的偏好次序，正向線性轉換前後不同的總效用的二次微分項的正負符號維持不變，因此可以接納「ALEP 互補性定義」的存在。

在本節中，我就再次運用對應的五種數學表述方式，來說明「ALEP 互補性定義」在基數效用理論中所扮演的角色，以及所衍生的一些特性與爭議。

4.1 數據性例子

---

[3] Geometrically, a utility function is a way to label indifference curves. Since every bundle on an indifference curve must have the same utility, a utility function is a way of assigning numbers to the different indifference curves in a way that higher indifference curves get assigned larger numbers. Seen from this point of view a monotonic transformation is just a relabeling of indifference curves. As long as indifference curves containing more-preferred bundles get a larger label than indifference curves containing less-preferred bundles, the labeling will represent the same preferences.

以一個簡單易懂的數據性例子，說明為何基數效用理論可以提供「ALEP 互補性定義」一處棲身之所的原因。

首先，如前所述，如果你對(5 顆蘋果，0 顆橘子)的偏好超過(4 顆蘋果，0 顆橘子)，後者的偏好又超過(3 顆蘋果，0 顆橘子)，又依序超過(2 顆蘋果，0 顆橘子)，又依序超過(1 顆蘋果，0 顆橘子)。你可以用由小而大的(1,2,3,4,5)的總效用數列來表示上述的偏好次序，此時蘋果邊際效用為(1,1,1,1)。現在因故你的橘子由 0 顆增加到 1 顆，而你對 (5 顆蘋果，1 顆橘子)的偏好超過(4 顆蘋果，1 顆橘子)，又依序超過(3 顆蘋果，1 顆橘子)、(2 顆蘋果，1 顆橘子)、以及(1 顆蘋果，1 顆橘子)。此時，你可以用由小而大的(2,3,4,5,6)的總效用數列來表示上述的偏好次序，此時蘋果邊際效用為(1,1,1,1)。

為獲得橘子變動後蘋果邊際效用的變化情況，即交叉邊際效用的數值正負，我們必須比較橘子由 0 顆增加到 1 顆前後兩種蘋果邊際效用的變化方向，橘子變動前的原先總效用數列(1,2,3,4,5)對應的蘋果邊際效用為(1,1,1,1)，橘子變動後總效用數列(2,3,4,5,6)對應的蘋果邊際效用還是為(1,1,1,1)，所以(橘子-蘋果的)交叉邊際效用是後一個邊際效用數列(1,1,1,1)減前一個邊際效用數列(1,1,1,1)而得到(0,0,0,0)，即(橘子-蘋果的)交叉邊際效用為零。在「交叉邊際效用為正是互補品，交叉邊際效用為負是替代品，交叉邊際效用為零是獨立品」的定義之下，這隱含橘子是蘋果的獨立品。

現在我們準備好了，可以對橘子增加前後所構成的總效用數列，即橘子變動前的原先總效用數列(1,2,3,4,5)與橘子變動後總效用數列(2,3,4,5,6)，進行**正向線性轉換**，以檢視此總效用數列所對應(橘子-蘋果)的交叉邊際效用為零(橘子是蘋果的獨立品)的特性，會發生改變或維持恆定？以判斷「交叉邊際效用為正是互補品」等定義，是否具有基數效用**正向線性轉換**後維持不變的特性。

首先，若我們對原兩個總效用數列(1,2,3,4,5)與(2,3,4,5,6)，進行乘以一個正的常數 $\alpha>0$ 再加上一個常數 $\beta \gtrless 0$ 的**正向線性轉換**，使它們變成 $(\alpha+\beta,2\alpha+\beta,3\alpha+\beta,4\alpha+\beta,5\alpha+\beta)$ 與 $(2\alpha+\beta,3\alpha+\beta,4\alpha+\beta,5\alpha+\beta,6\alpha+\beta)$。此時，兩者對應的邊際效用分別變成 $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ 與 $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$。

我們準備好了，可以檢視**正向線性轉換**(在此為乘以一個正的常數 $\alpha>0$ 再加上一個常數 $\beta \gtrless 0$)前後，先後兩種總效用數列所對應(橘子-蘋果)的交叉邊際效用為零(橘子是蘋果的獨立品)的特性，會發生改變或維持恆定了？

我們必須比較單調轉換下橘子由 0 顆增加到 1 顆前後兩種蘋果邊際效用的變化方向，單調轉換下橘子變動前的原先總效用數列 $(\alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 4\alpha+\beta, 5\alpha+\beta)$ 對應的蘋果邊際效用為 $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$，橘子變動後總效用數列 $(2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 4\alpha+\beta, 5\alpha+\beta, 6\alpha+\beta)$ 對應的蘋果邊際效用還是為 $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$，所以(橘子-蘋果的)交叉邊際效用是後一個邊際效用數列 $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ 減前一個邊際效用數列 $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$ 而得到(0,0,0,0)，即(橘子-蘋果的)交叉邊際效用為零。這隱含橘子是蘋果的獨立品。也就是，經過**正向線性轉換**後，對於同一個人，也就是，對於同一偏好的相同的人，對他而言橘子是蘋果的獨立品還是維持獨立品。

簡單地說，正向線性轉換後不會改變基數效用的交叉邊際效用的正負性質，基數效用能找回被序數效用趕出家門的「ALEP 互補性定義」。

4.2 一般化的效用函數形式

我們接著以一般化的數學式，說明只能進行正向線性轉換的基數效用理論的性質。若我們對總效用 $U(x,y)$ 進行正向線性轉換使它變成 $V(x,y)$，如：

(41) $$V(x,y)=\alpha U(x,y)+\beta; \quad \alpha>0, \quad \beta \gtrless 0$$

則 $U(x,y)$ 與 $V(x,y)$ 此時代表相同的基數效用偏好(總效用差值的數列的數據大小次序也維持相同)，這會衍生出以下的關係式：

(42) $$V_x=\alpha U_x, \; V_y=\alpha U_y$$

(43) $$V_{xx}=\alpha U_{xx}, \; V_{yy}=\alpha U_{yy}$$

(44) $$V_{xy}=\alpha U_{xy}, \; V_{yx}=\alpha U_{yx}$$

相對於正向單調轉換之下總效用的二次微分項不能維持固定不變的性質，現在我們得到 $signV_{ij}=signU_{ij}$ 的結果，其中 $i,j=x,y$。因此，在效用函數只能進行正向線性轉換之下，可救回被序數效用理論所拋棄的常識性的「ALEP 互補性定義」。

4.3 特殊效用函數形式

再以三個特殊的效用函數經過正向線性轉換來研究其相關性質。三個特殊的效用函

數分別是：

(45-A) $V^1(x,y)=\alpha xy+\beta$

(45-B) $V^2(x,y)=\alpha\ln xy+\beta=\alpha(\ln x+\ln y)+\beta$

(45-C) $V^3(x,y)=\alpha(\ln x+\ln y)^{1/2}+\beta$

這三個特殊效用函數分別是(5-A)-(5-C)的效用函數的正向線性轉換 $V(x,y)=\alpha U(x,y)+\beta$ 函數。

這三個效用函數的邊際效用分別是：

(46-A) $V_x^1=\alpha y>0$, $V_y^1=\alpha x>0$；邊際效用為正

(46-B) $V_x^2=\dfrac{\alpha}{x}>0$, $V_y^2=\dfrac{\alpha}{y}>0$；邊際效用為正

(46-C) $V_x^3=\dfrac{\alpha}{2x}(\ln x+\ln y)^{-\frac{1}{2}}>0$, $V_y^3=\dfrac{\alpha}{2y}(\ln x+\ln y)^{-\frac{1}{2}}>0$；邊際效用為正

對正向線性轉換前後的總效用函數所各自對應的邊際效用函數進行比較，我們會發現(6-A)與(46-A)的邊際效用都是正值，(6-B)與(46-B)的邊際效用也都是正值，連(6-C)與(46-C)的邊際效用都是正值，正向線性轉換不會改變邊際效用的正負符號。

三個效用函數所對應的邊際效用是遞減或遞增的情況，分別是：

(47-A) $V_{xx}^1=0$, $V_{yy}^1=0$；邊際效用常數

(47-B) $V_{xx}^2=-\dfrac{\alpha}{x^2}<0$, $V_{yy}^2=-\dfrac{\alpha}{y^2}<0$；邊際效用遞減

(47-C) $V_{xx}^3=-\dfrac{\alpha}{2x^2}(\ln x+\ln y)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{\alpha}{4x^2}(\ln x+\ln y)^{-\frac{3}{2}}<0$,

$V_{yy}^3=-\dfrac{\alpha}{2y^2}(\ln x+\ln y)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{\alpha}{4y^2}(\ln x+\ln y)^{-\frac{3}{2}}<0$；邊際效用遞減

對正向線性轉換前後的總效用函數所各自對應的二次微分項進行比較，我們會發現 (7-A)

與(47-A)的邊際效用都是常數，(7-B)與(47-B)的邊際效用都是遞減，(7-C)與(47-C)的邊際效用都是遞減，正向線性轉換因此也不會改變邊際效用變化方向的性質。

它們所對應的交叉邊際效用正負符號，也有所不同：

(48-A) $V_{xy}^{1}=\alpha>0$，$V_{yx}^{1}=\alpha>0$；交叉邊際效用為正

(48-B) $V_{xy}^{2}=0$，$V_{yx}^{2}=0$；交叉邊際效用為零

(48-C) $V_{xy}^{3}=-\dfrac{\alpha}{4xy}(\ln x+\ln y)^{-\frac{3}{2}}<0$，$V_{yx}^{3}=-\dfrac{\alpha}{4xy}(\ln x+\ln y)^{-\frac{3}{2}}<0$；交叉邊際效用為負

對正向線性轉換前後的總效用函數所各自對應的交叉二次微分項進行比較，我們會發現(8-A)與(48-A)的交叉邊際效用都是正，(8-B)與(48-B)的交叉邊際效用都是零，(8-C)與(48-C)的交叉邊際效用都是負，正向線性轉換不會改變交叉邊際效用正負符號的性質。

4.4 特殊效用函數的決策模型

接著在「消費者在預算限制下極大化總效用的分析架構」之下，分析這三個特殊效用函數所隱含的一些特性，這三個模型分別對應於(9-A)-(9-C)的決策模型：

(49-A) $\max\limits_{x,y} \quad V^{1}(x,y)=\alpha xy+\beta \quad s.t. \quad px+qy=M$

(49-B) $\max\limits_{x,y} \quad V^{2}(x,y)=\alpha\ln xy+\beta=\alpha(\ln x+\ln y)+\beta \quad s.t. \quad px+qy=M$

(49-C) $\max\limits_{x,y} \quad V^{3}(x,y)=\alpha(\ln x+\ln y)^{1/2}+\beta \quad s.t. \quad px+qy=M$

這三個模型的邊際效用雖然數值不同但其正負符號都是正值，它們所對應的純粹與交叉邊際效用變化方向則有所不同。

這三個模型所對應的邊際替代率分別是：

(50-A) $MRS_{xy}^{1}=\dfrac{V_{x}^{1}}{V_{y}^{1}}=\dfrac{\alpha y}{\alpha x}=\dfrac{y}{x}$

(50-B) $$MRS_{xy}^{2}=\frac{V_x^2}{V_y^2}=\frac{\alpha/x}{\alpha/y}=\frac{y}{x}$$

(50-C) $$MRS_{xy}^{3}=\frac{V_x^3}{V_y^3}=\frac{\frac{\alpha}{2x}(\ln x+\ln y)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{\alpha}{2y}(\ln x+\ln y)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{y}{x}$$

以上式子顯示三個不同模型的邊際替代率完全一樣，即正向線性轉換前後的總效用函數所各自對應的邊際替代率是維持不變的。這三項結果分別對應於(10-A)-(10-C)的結果。

最適化的一階條件也完全一樣

(11-D) $$MRS_{xy}^{i}=\frac{y}{x}=\frac{p}{q},\ \ i=1,2,3\quad px+qy=M$$

因為邊際替代率完全一樣，最適化的二階條件也完全一樣，即無異曲線凸向原點的二階條件成立。

接著，我們可以求出三個不同模型完全一樣的需求函數，即：

(12-D) $$x^{*}=\frac{1}{2}\frac{M}{p}$$

(13-D) $$y^{*}=\frac{1}{2}\frac{M}{q}$$

此需求函數與(12)-(13)中的需求函數長得一模一樣。

簡單地說，前面的三個模型(9-A)-(9-C)式與各自對應的後面的三個模型(49-A)-(49-C)中的效用函數彼此為彼此的正向線性轉換函數，藉由簡單的分析我們發現正向線性轉換非但不會改變效用函數所描繪的偏好次序，即所對應的效用數值的相對大小不會發生改變，消費者均衡條件一樣，最適解(需求函數)一樣，呈現同樣的選擇或消費行為。並且前後對應的三個不同模型的邊際效用的正負符號維持不變：交叉邊際效用是正數的效用函數正向線性轉換後還是正、交叉邊際效用為零的效用函數正向線性轉換後還是零、交叉邊際效用是負的效用函數正向線性轉換後還是負的。

4.5 一般化效用函數的決策模型

接著以一般化的消費者決策模型來完整地呈現整個論述，還未進行正向線性轉換的模型分析已經記錄在(14)-(23)式的分析中了。在此，我們只需要分析正向線性轉換後的消費者模型。

而正向線性轉換$V(x,y)=\alpha U(x,y)+\beta$後的一般化消費模型變成：

(51) $$\max_{x,y} \quad V(x,y)=\alpha U(x,y)+\beta,\ \ s.t. \quad px+qy=M$$

最適化的一階條件要求：

(52) $$\frac{V_x(x,y)}{V_y(x,y)}=\frac{p}{q}$$

(53) $$px+qy=M$$

二階條件要求無異曲線凸向原點，即：

(54) $$J=q^2V_{xx}-2pqV_{xy}+p^2V_{yy}<0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：

(55) $$x_M=\frac{qV_{xy}-pV_{yy}}{-J}\gtrless 0$$

(56) $$y_M=\frac{pV_{xy}-qV_{xx}}{-J}\gtrless 0$$

價格變動對購買數量的效果為：

(57) $$x_p=\frac{qV_y}{J}+x\frac{qV_{xy}-pV_{yy}}{J}\gtrless 0$$

(58) $$y_p=-\frac{qV_x}{J}+x\frac{pV_{xy}-qV_{xx}}{J}\gtrless 0$$

(59) $$x_q=-\frac{pV_y}{J}+y\frac{qV_{xy}-pV_{yy}}{J}\gtrless 0$$

(60) $$y_q = \frac{pV_x}{J} + y\frac{pV_{xy} - qV_{xx}}{J} \gtrless 0$$

然後，我們證明正向線性轉換前後的分析結果會一樣。首先，正向線性轉換前後的最適化一階條件是完全相同的，因為：

(61) $$\frac{V_x}{V_y} = \frac{\alpha U_x}{\alpha U_y} = \frac{U_x}{U_y} = \frac{p}{q}$$

這表示，正向線性轉換後的最適化條件不變，即最適解的數值不變。

我們可以證得它們各自所得變動對購買數量效果相等的結果，即：

(62) $$x_M = \frac{qV_{xy} - pV_{yy}}{-J} = \frac{\alpha qU_{xy} - \alpha pU_{yy}}{-\alpha H} = \frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{-H}$$

(63) $$y_M = \frac{pV_{xy} - qV_{xx}}{-J} = \frac{\alpha pU_{xy} - \alpha qU_{xx}}{-\alpha H} = \frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{-H}$$

價格變動對購買數量的效果也是一樣：

(64) $$x_p = \frac{qV_y}{J} + x\frac{qV_{xy} - pV_{yy}}{J} = \frac{\alpha qU_y}{\alpha H} + x\frac{\alpha qU_{xy} - \alpha pU_{yy}}{\alpha H} = \frac{qU_y}{H} + x\frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{H}$$

(65) $$y_p = -\frac{qV_x}{J} + x\frac{pV_{xy} - qV_{xx}}{J} = -\frac{\alpha qU_x}{\alpha H} + x\frac{\alpha pU_{xy} - \alpha qU_{xx}}{\alpha H} = -\frac{qU_x}{H} + x\frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{H}$$

(66) $$x_q = -\frac{pV_y}{J} + y\frac{qV_{xy} - pV_{yy}}{J} = -\frac{\alpha pU_y}{\alpha H} + y\frac{\alpha qU_{xy} - \alpha pU_{yy}}{\alpha H} = -\frac{pU_y}{H} + y\frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{H}$$

(67) $$y_q = \frac{pV_x}{J} + y\frac{pV_{xy} - qV_{xx}}{J} = \frac{\alpha pU_x}{\alpha H} + y\frac{\alpha pU_{xy} - \alpha qU_{xx}}{\alpha H} = \frac{pU_x}{H} + y\frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{H}$$

其中，可證明 $J = q^2V_{xx} - 2pqV_{xy} + p^2V_{yy} = F'H < 0$。

藉由上述數學證明，我們發現總效用函數經過正向線性轉換後，不會影響比較靜態分析的總結果。並且，在基數效用的理念下,「ALEP 互補性定義」是一種可以找到發揮空間的概念。

因此，如果要保留「ALEP 互補性定義」，一個做法是放棄核心精神是效用只能排序的「序數效用」，而改採取只能進行線性轉換的基數效用即可。

但是，有所得也有所失。基數效用為救回「ALEP 互補性定義」與邊際效用遞減法則，也付出高昂的代價。

正向線性轉換就是公分與公尺等長度概念所具有的基本性質，基數效用正向線性轉換的特性因此隱含個人有能力分辨任何兩個效用差異(類似長度)的比例。此時效用變成一種相當強烈的可衡量的概念，效用可衡量一直被認為是一種落伍的不切實際的標誌。甚至，Samuelson (1938)指出在真實人生中構成基數效用所需添加的假設或公設出現的機率幾乎為零，因此以「無限地不可能的」(infinitely improbable)的極端負面字眼來表達他對基數效用理論的評斷。

4.6 序數效用主義者的主張

分析至此，我們發現序數效用理論與基數效用理論獲得同樣的消費者行為的預測結果，而序數效用理論的適用範圍較大或所要求成立的假設比較寬鬆，序數效用理論似乎是比較好的效用理論，由序數效用理論似乎單獨就足夠建構出合理的消費理論了。

因此，一些序數效用主義者強烈主張，比較序數與基數效用，兩種所獲得的分析結果一樣，所以採用序數效用是比較好的選擇，並且是最好的選擇。

更詳細地說，任何可以用來表示相同偏好關係的效用函數，也就是任何總效用函數經過任何單調正向轉換後，都不會影響消費者的均衡條件，也都不會影響比較靜態分析的整體的或最後的結果。因此，即使有些總效用函數所對應的邊際效用遞減、有些遞增以及有些不變，以及交叉邊際效用正負符號可能是正、可能是零、可能是負。但這些差異性，無關緊要，因為這些差異性看來似乎絲毫也不會影響分析結果，所以邊際效用遞減與「ALEP 互補性定義」等概念是無意義的概念。

這也難怪有些經濟學家主張邊際效用遞減法則與「ALEP 互補性定義」其實是多餘的、膚淺的、無意義的、且不科學的概念。拋棄此概念不只毫不足惜，這種割捨掉不可觀察的主觀心理法則的做法,可被正面地標舉為一種讓經濟學邁向真正科學的進步徽章。

也因此，隨著總效用的交叉微分項或「ALEP 互補性定義」退出個體選擇理論的舞台，互補品或替代品的角色就也跟著消失得無影無蹤了。這就像邊際效用遞減的概念，也因為跟序數效用的核心概念不能並存一樣，也只好被現代序數效用主義者將它供奉在經濟學的歷史博物館中，只供經濟史學家與學生偶爾憑弔與懷舊之用。

但是，有很多人會認為邊際效用遞減法則被更周全的更完美的邊際替代率遞減法則來取代，對序數效用主義的支持者而言，一切顯得很自然完美且順理成章，是一種完美的學術進步的歷史發展。

同樣地，互補與替代的觀念是一種不可或缺的概念，也必須尋找新的替代互補性概念，來填補「ALEP 互補性定義」退出個體選擇理論的舞台後所留下的空缺。自然厭惡真空，序數效用主義不得不排斥「ALEP 互補性定義」，那用什麼概念來替代呢？

5. 尋找替代 ALEP 定義的新互補性定義

雖然，「ALEP 互補性定義」是刺激 Hicks-Allen 發動需求理論革命的起因，但因「ALEP 互補性定義」與無異曲線特性的序數效用概念無法相容，所以要尋找新的互補性概念。但是，事實上，了解相關文獻的人，會發現要找出一個合理的能被共同接受的新互補性定義，不是容易的事。同樣地，要重建需求理論另一個必須被取代的(總效用的二次微分項)概念是邊際效用遞減法則。邊際效用遞減法則，對一般經濟學家而言，似乎是能成功地被新的概念邊際替代率遞減概念完美地加以取代。

這個成功取代的案例，後來可能啟發 Hicks 思考一項能成功取代「ALEP 互補性定義」的新定義的思維方向。

序數效用主義者會認為現在的成功的理論發展經驗是，以邊際替代率成功地取代邊際效用的概念，並且邊際替代率遞減成功取代邊際效用遞減的概念。

那應該用什麼來取代「一項商品的持有數量增加提高所關注商品的邊際效用為互補品的定義」呢？一個直接的類推就是把「邊際效用」用「邊際替代率」來取代。新的定義的可能候選者因此變成「一項商品的持有數量增加所關注商品的邊際替代率提高為互補品的定義」。但，問題是，其中「所關注商品的邊際替代率」不是一個完整的概念，因為邊際替代率是定義來描述兩種選項或商品之間的關係。因此，必須清楚標明是「所關注商品與哪一種選項或商品之間的邊際替代率」。

因此，接下來應該思考的問題變成是：「另一種選項或商品」應該是什麼？如果我們現在要討論 x 與 y 兩種商品之間的關係，那我們該如何做呢？若 x 商品為所關注的商品，y 為數量增加的商品。這時候一個定義是「y 商品數量增加 x 與 y 兩種商品的邊際替代率的影響」，也就是以「x 與 y 兩種商品的邊際替代率」來取代「x 商品的邊際效

用」的意思。

這項定義有明顯的缺點，因為，無異曲線要求內部解時，無異曲線會凸向原點，所以此時「*y* 商品數量增加 *x* 與 *y* 兩種商品的邊際替代率的影響」，一定是負值。所以兩者之間一定是替代品，沒有出現互補品的機會，這看來似乎不是合理的結果。

因此，只好引進另一個(第三個) 選項，此第三個選項的最佳選擇就是貨幣，一般購買力的意思。所以 Hicks (1939)就如此將新的互補性定義改成，以「*y* 商品數量增加使 *x* 與 *m* 的邊際替代率增加為互補品」取代「*y* 商品數量增加使 *x* 的邊際效用增加為互補品」的定義。以「*y* 商品數量增加使 *x* 與 *m* 的邊際替代率減少為替代品」取代「*y* 商品數量增加使 *x* 的邊際效用減少為替代品」的定義。以「*y* 商品數量增加使 *x* 與 *m* 的邊際替代率維持不變為獨立品」取代「*y* 商品數量增加使 *x* 的邊際效用維持不變為獨立品」的定義。

這樣的思路歷程，就清晰地出現在 Hicks (1939)的《價值與資本》書中的〈第一篇 主觀價值理論〉的〈第三章 互補關係〉中：[4]

> 一、Edgeworth 和 Pareto 對互補的與替代的貨品所下的定義如下(Marshall 沒有討論此議題)：[5]如果 X 的供給增加（Y 固定不變）提高 Y 的邊際效用，則在消費者的預算裡面 Y 與 X 便是互補的；如果 X 的供給增加（Y 固定不變）降低 Y 的邊際效用，Y 對 X 便是替代的（或者是 X 的替代品）。按照這個定義，可以明顯看出互補與替代的關係可以反覆適用：假如 Y 是 X 的互補品，X 也是 Y 的互補品；假如 Y 是 X 的替代品，X 也是 Y 的替代品。[6]假定貨幣的邊際效用是常數(是固定常數)，由這個定義立刻得到如下的推論：如果 X 與 Y 是互補的，則在 X 的價格下跌使 X 的需求增加時，必然提高 Y 的邊際效用，因而亦將增加 Y 的需求。同樣，如果 X 與 Y 是替代品，X 的價格下跌必將減少 Y 的需求。到此為止，一切順利；Edgeworth 和 Pareto 都很滿意。

---

[4] 相關內容取自邢慕寰(1967)，《價值與資本》(*Value and Capital*)的譯稿邢慕寰譯。

[5] Edgeworth, Papers, vol. i. p.117; Pareto, *Manuel* p.268.

[6] 就一定的效用函數而言，偏微分的次序不重要。

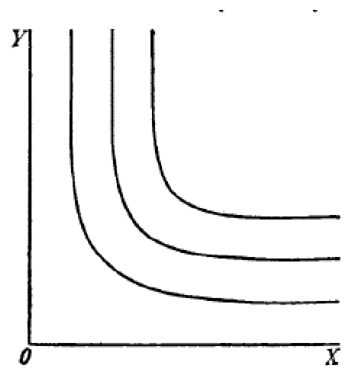

Fig. 12.

然而 Pareto 實在沒有理由感到滿意。因為當他試圖把他的定義改用無異曲線表現時,他遇到了困難。他雖然找出 X Y 互補(照上述定義)與 XY 的無異曲線(其他消費品均視為是常數(是固定常數))甚為彎曲的情形以及 XY 相互代替與無異曲線甚為平坦的情形之間有些平行關係,[7]但是這個平行關係毫不精確,這一點,由於不可能在無異曲線上找到相當於互補品與替代品的區別的彎曲度即可了然(按照定義,它應該是一個十分清晰的區別)。

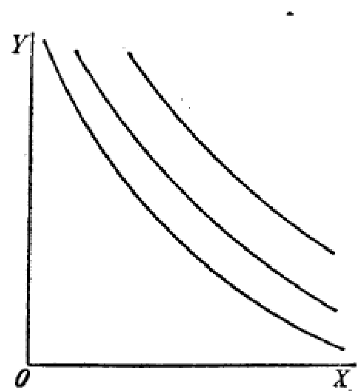

Fig. 13.

此外,Edgeworth 和 Pareto 的定義違反了 Pareto 自己主張的效用不可衡量的原則。如果效用不是一個絕對數量,而只是消費者偏好尺度的指數,他的互補品的定義就沒有準確的意義。互補品

[7] 在圖十二裡面,在無異曲線的彎曲附近單獨增加 X 沒有什麼好處,除非 Y 同時增加。在圖十三裡面,X 的增加可能伴著 Y 的大量減少而仍然有利。

與替代品的區別將因所採用的武斷的效用尺度而異。[8]

二、這些困難，可用下面的方法克服。首先我們要用「對貨幣的邊際替代」（即「用貨幣表示的邊際效用」）代替 Edgeworth 和 Pareto 的定義中的「邊際效用」。由於 Edgeworth 和 Pareto 的定義在應用上只有假定貨幣邊際效用是常數(是固定常數)時才有意義，所以貨幣——即用所得購買的「其他東西」——一定要以某種方式加入考慮實在不足為奇。

其次，我們要追問當 X 的供給增加時（Y 固定不變）對「貨幣」發生什麼影響；根據我們在上面的討論，為了抵消 X 的增加，貨幣的供給必須減少到使消費者不比以前寬裕的地步。

這個修正的必要，是基於我們修正邊際效用遞減法則的同一理由；也可以說它是我們將邊際效用遞減法則改為邊際替代率遞減法則的必然後果。我們需要一個替代品的定義，以便肯定同一實物商品的一個額外單位是以前各單位的替代品。現在，只有在一個額外單位的 X 去代替貨幣而消費者仍不比以前寬裕的情況下，這個額外單位的 X 才斷然降低對貨幣的邊際替代率（我們的邊際替代率遞減法則）。所以當 X 代替貨幣而結果消費者仍不比以前寬裕時，如果 Y 對貨幣的邊際替代率減少，我們就應該說 Y 是 X 的替代品；如果 Y 對貨幣的邊際替代率增加，我們就應該說 Y 與 X 是互補。

但是此項定義的主要缺點，是此定義完全立基於很難觀測的心理因素，這不是序數效用主義者所標榜的行為主義分析法(由實際可觀察的行為進行理論建構)所偏好的分析角度。

那，接下來，還有別的選擇嗎？

基本上，有潛力的候選者必須要具有某一外生變數變動對內生的 x 與 y 兩種商品的購買數量的影響的性質。由於在基本的 Slutsky-Hicks 的標準模型中，只有三個必然的外

8 參閱 Mathematica Appendix. §5.

生變數，一個是所得 M ，另兩個分別是兩種商品 x 與 y 的價格 p 與 q 。明顯地，所得變化對 x 與 y 購買數量的影響，看來與替代與互補性很難扯上關係。價格 p 對自身商品 x 購買數量的影響，也難與替代與互補性出現攀親帶故的關係，價格 q 對自身商品 y 購買數量的影響，當然也與替代與互補性無所牽扯。最後，商品 x 價格 p 的變化對另一種商品 y 的購買數量的影響，以及，對稱地，商品 y 價格 q 的變化對另一種商品 x 的購買數量的影響，牽涉到兩種商品之間的關係了，倒是與替代與互補性好像有些關聯性存在。雖然看起來有些勉強也很間接，但是，序數效用主義者已經無所選擇了，沒有退路了，看來這就是序數總效用主義者把正常的替代互補性概念保留在其理論架構中的最有潛力的合理的救星了。

事實上，現在的替代品的定義就是採取這樣的定義方式。也就是，若一個商品的價格提高增加另一商品的需求量，價格提高商品就稱為所關注商品的替代品。同理，一項商品的價格提高降低所關注商品的需求量，則價格提高商品可稱為所關注商品的互補品。類似地，一項商品的價格提高不會影響所關注商品的需求量，則價格提高商品可稱為所關注商品的獨立品。

接著，序數總效用主義者發現，因為一項商品的價格的變化對另一項商品購買數量的影響，在他們非常不自然地人工化的無異曲線分析架構下，可以拆解成交叉替代效果與所得效果兩項。所謂交叉替代效果是在價格變動前的原來無異曲線下，純粹因相對價格變動所造成的購買數量的變動，而所得效果則是在相同的相對價格下所得因價格變化而隨之變動再對購買數量造成影響的效果。這項非常不自然的人工分項，進一步提醒序數總效用主義者，可以將替代與互補性進一步精緻地劃分成兩類：毛替代(gross substitutes)與淨替代(net substitutes)，以及毛互補(gross complements)與淨互補(net complements)。

雖然在真實世界中很難區分，但兩種概念的界線在觀念上很清楚，毛替代與毛互補是指包含交叉替代效果與所得效果兩項的概念，而淨替代與淨互補是指只包含交叉替代效果而無所得效果的概念。

在這種定義之下，特別值得注意的兩件事。一是任兩商品的淨替代具有對稱性，因為在相關方程式中替代效果會相等，即 $pU_x/H = qU_y/H$ 與 $pV_x/J = qV_y/J$ ；二是在只有兩種商品時，兩種商品的關係一定是淨替代關係而不可以是淨互補的關係，因為無異曲線凸向原點所以淨替代效果一定為負，即 $pU_x/H = qU_y/H < 0$ 與 $pV_x/J = qV_y/J < 0$ 。

假如一個消費者把他的所得只分配在兩種貨品的購買上面，假如他不能購買任何其他的貨品，那麼除了這兩種貨品的代替關係以外，就不能有其他任何關係。因為如果他要多得其中之一，而仍然不比以前的情況較好，就必須少得另一種貨品。但是當他分配他的所得在兩種貨品以上時，就可能有其他的關係。當然，所有其他貨品仍舊可能是一種貨品（如 X）的替代品。這種情形，發生於 X 的供給增加時為符合如下條件必須減少其他貨品的數量：(一）消費者的情況不比以前改善，(二）其他貨品之間的邊際代替率維持不變。在這裡，有利於 X 的代替就是不利於其他每一種商品的代替。但是為符合這兩個條件，某些其他商品——與 X 互補的商品——也可能要配合 X 供給的增加而增加。很明顯地，所有消費品不可能都與 X 互相互補，因為消費者不可能多得所有商品而其情況仍然不比以前較好。因此我們看出在兩種貨品的無異曲線圖解裡面何以不能發生互相互補的情形；只有在有第三種物品可供 XY 代替時 X 與 Y 才可能互相互補。

也可以說，互相互補的商品組合只有在外邊有東西可供代替時才有可能。就三種貨品 X、Y 與「貨幣」而論，X 與 Y 可能互相互補；但是如果這樣的話， X 必然是貨幣的替代品，同時（由於 XY 的互補關係可以彼此對調，有利於 X 的代替也會同時發生有利於 Y 的代替）Y 必然也是貨幣的替代品。就四種貨品 X、Y、Z 與「貨幣」而論，X、Y、Z 可能彼此互補；但是如果是這樣的話，其中每一種貨品必然都是貨幣的替代品。所以無論有多少種貨品進入消費者的支出預算，在理論上除一種貨品以外所有貨品可能形成一個互相互補的集團，其中每一種貨品都是外面的那一種貨品的替代品。還是互相互補的最大可能的限度；在另一個極端，可能完全沒有互相互補的關係。

在實際上，我們可以相當穩妥地假定我們通常涉及的情況比較近於互補的低限。任一種貨品的周圍總有一些與之互補的其他貨品；但是它與任何一種隨意挑選的其他貨品之間最可能的關係，將是代替的關係（自然是輕微的）。至少這是我們預料可能發生的事。

不幸的是，關於任兩商品的淨替代具有對稱性的第一項性質，在實證研究中是不成

立的，如 Shultz (1935)的實證研究；而關於第二項性質，只有兩種商品的關係一定是淨替代關係而不可以是淨互補的關係，更是飽受批評的怪異概念。

值得特別深思與注意地，一項一般人不易發覺的問題，為何任兩商品的淨替代性一定是負值呢？這項性質其實與依據心理理由定義的互補性定義，毫無關係。因為淨替代效果是起因於 $pU_x/H = qU_y/H < 0$ 與 $pV_x/J = qV_y/J < 0$，這因素是取決於商品邊際效用為正(分子部分)及無異曲線凸向原點(分母的部分)的特性，因此與總效用的交叉微分項的心理內省的定義無關。換句話說，這項性質是因為採取無異曲線分析架構所必須承擔與衍生的必然後果，是採取極大化總序數效用的分析典範所必須同時繼承的結果，看來其實是與消費者心理上的互補性認知完全無關。體會到這一點會得到兩個重要心得：一是這個定義的思維方式有一些莫名其妙，定義的提供者可能不知道自己真正在做什麼事，只是一種模模糊糊的且想當然爾的概念。二是透過極大化總序數效用的分析典範或無異曲線分析架構來看世界，會得到或看到一些奇奇怪怪的誤導性的概念，這顯示或暗示我們，這套分析方法應該不是正確的分析個體選擇的方法。

6. 序數效用理論當道的個體選擇理論

事實上，一般文獻對相關的論述的認知程度，只停留於以下的觀察。

正向線性轉換就是效用具有長度概念的基本性質，隱含個人有能力分辨任何兩個效用差異(類似長度)的比例，效用此時是一種相當強烈的可衡量的概念，這是一種不切實際的落伍標籤。我們也說過，Samuelson (1938) 以「無限地不可能的」(infinitely improbable)的極端負面字眼來傳達他對基數效用理論的論斷，因為在真實人生中構成基數效用所需添加的假設或公設出現的機率幾乎為零。基數效用理論因此是一種非常不切實際的理論。我們也因此可以理解為何 Samuelson 會變成一位相當強硬的序數效用主義者。Samuelson (1974)於是在 Hicks-Allen 序數革命之後還在思考如何在序數主義之下發動對傳統定義的救援行動。

由這歷史的發展，我們也很難理解如果有人了解了基數效用這種幾乎不可能的特性之後，怎麼還會繼續採用基數效用理論來進行各式各樣的應用分析的心態。因此，現在經濟文獻中不斷出現的極大化基數總效用的應用理論的現象，或許我們應該詮釋為現代的應用經濟學家並不瞭解這段序數與基數效用理論的發展史與相關概念。或許是因為一些學者無法接受序數效用理論的無法容許邊際效用變化率正負的基本特性。

並且，也是因為基數效用理論的重大缺失，使得一些序數效用主義者相當有信心地主張，序數是比基數更好的效用理論，因為在獲得相同論述與分析結果的情況下，只需要用到較少或較寬鬆的假設。因此，在個體經濟理論中序數效用主義一直是唯一主流的排他性理論。

但是，事實上，真的如此嗎？序數效用理論真的可以完全做到基數效用理論能做到的事嗎？

其實，事實不是如此，而且是出乎意料之外地糟糕。

7. 林忠正的批評：魔鬼藏在細節裡，序數效用理論會曲解事實

林忠正在一些文章中，呼籲在接受序數總效用主義者的論述之前，應該要多多深思；再繼續前進之時，先停下腳步來，再仔細想一想，序數效用理論所建構出的需求理論真的沒有缺點嗎？沒有邊際效用遞減和「ALEP 互補性定義」等概念真的不會對需求理論造成嚴重傷害嗎？其實，魔鬼藏在細節裡！

藉由以上的分析，看來任何總效用函數經過任何單調正向轉換後所構成的消費者選擇模型的數學分析結果都是一樣的，序數效用理論因此是完美的理論，但在做下此結論之前，要提防外表是會騙人的！要知道魔鬼藏在細節裡！再多想想你可能會發現雖然單調正向轉換前後的任何兩個模型，所獲得的分析結果**(或更精確地說是總效果的分析結果)**是一樣的，但是若總效果可分成兩項，你會驚訝地發現這兩分項可能會是不一樣的。這兩分項不只數值的大小可能不一樣，連數值正負方向可能都會不一樣。

這項事實，可以利用所得變動的效果作為例子來加以說明。因為在所得變動的總效果中，在單調正向轉換前後兩模型中的互相對應的兩小項的大小關係，分別是以下兩關係式的不等式左右兩邊的分項：

(68) $$\frac{qU_{xy}}{-H} \gtrless \frac{qV_{xy}}{-J} = \frac{qF'U_{xy} + qF''U_xU_y}{-F'H} = \frac{qU_{xy}}{-H} + \frac{qF''U_xU_y}{-F'H}$$

(69) $$\frac{pU_{yy}}{H_{xx}} \gtrless \frac{pV_{yy}}{J_{xx}} = \frac{pF'U_{yy} + pF''U_yU_y}{-F'H} = \frac{pU_{yy}}{-H} + \frac{pF''U_yU_y}{-F'H}$$

因此，除非 $F''=0$，則上面的兩關係式等號才會成立；但若 $F''=0$ 不成立，單調正向轉

換前後，雖然所獲得的總效果一樣，但總效果的兩分項的數值可能會不一樣。其實，不只數值的大小可能會不一樣，連數值正負方向都可能會不一樣。

此結果表明這兩個分項是不能有實際經濟意義的，否則會在相同的偏好下對應出不同的行為，這麻煩可就大了。進一步說，如果兩個分項具有不同的實際經濟意義，則代表單調正向轉換前後的偏好是不一樣的，這表示必須放棄無異曲線的核心理論，這當然是避之唯恐不及的事，這當然是不可以接受的事。所以為了大我必須犧牲小我，也就是為了大局著想，總效果中的兩個分項是不能有實際經濟意義的。這項特性因此會限制 Slutsky-Hicks 個人選擇模型所能刻畫的故事的豐富度，也限縮了模型的解釋能力與內涵的豐富性。

接著，我想你還想知道，除了一些較豐富的意義如貨幣邊際效用遞減等概念不能有意義之外，會不會出現更糟糕的事呢？答案是會的，有時候會導致我們對實際現象做出錯誤或不恰當的解釋。我們以劣等品的解釋為例來加以說明。

7.1 當另一種商品是現金時

在 Slutsky-Hicks 的個人選擇理論中只能以所得變化的總效果來定義劣等品，也就是所得提高需求數量下降的物品($x_M<0$)會被解釋為劣等品；而不能以所得提高使消費者對此商品的邊際效用下降(如$U_{xm}<0$)的角度來定義劣等品。但以所得提高需求數量下降($x_M<0$)的角度來定義劣等品是會出問題的。

(70) $$sign(x_M)=sign(qU_{xm}-pU_{mm})\neq sign(U_{xm})$$

在貨幣邊際效用遞增的情況下，即使所得提高會使商品的邊際效用增加($U_{xm}>0$)，還是可能推導出所得增加而消費數量下降的情況。以 Slutsky-Hicks 的眼光來看，所得提高需求數量下降的物品($x_M<0$)被稱為劣等品；但是，由另一角度來看，此時愈有錢時人們對此物品的邊際評價或效用是提高的，這時候稱此物品為劣等品是可能會出現違反常識的現象的，這可能是很荒謬的解釋。為什麼呢？

例如，我愈有錢時，我對高級 CD、或高檔餐廳的餐點、或高級服飾等商品的邊際效用愈高。在一般的情況，所得提高使我的貨幣邊際效用下降，並且我對這些商品的邊際效用增加(如$U_{xm}>0$)，我會消費更多的這些商品，這時候由$x_M<0$與$U_{xm}<0$來定義劣

等品都一樣好。但是，假設我突然中了統一發票 1000 萬元新台幣的首獎，我發現有機會買得起房子，突然找到更好的存錢理由，所得提高此時增加貨幣邊際效用，雖然愈富有還是增加我對這些商品的邊際效用，但這些高級商品的消費卻較少，這時由 $x_M < 0$ 來看是劣等品，但是由 $U_{xm} > 0$ 來思考，這些商品還是高貴商品不是劣等品。此分析法因此有時候會讓經濟學家或經濟學生，把不是劣等品的高貴物品錯誤詮釋為劣等品，這會曲解事實。[9]

7.2 當另一種商品不是現金時

藉由兩種商品之間的邊際效用的互動性的管道所導致的市場行為後果，由後果來直接定義何謂互補品與替代品是很奇怪的事。例如兩種商品之間，可以沒有任何關係存在，只是因為其中的商品的邊際效用遞減或遞增所造成的結果，而或多或少購買某物，就因此被認定為兩種商品為替代或互補品是很奇怪的想法。

(71) $$sign(y_p) = sign[-qU_x - x(pU_{xy} - qU_{xx})] \neq sign(-U_{xy})$$

(72) $$sign(x_q) = sign[-pU_x - y(qU_{xy} - pU_{yy})] \neq sign(-U_{xy})$$

由於 $sign(y_p) \neq sign(U_{xy})$ 以及 $sign(x_q) \neq sign(U_{xy})$，這表示有可能出現這兩種商品，在消費者的心理感受上是替代品 $U_{xy} < 0$，但在購買行為上卻被認為是互補品 $y_p < 0$ 或 $x_q < 0$；在消費者的心理感受上是互補品 $U_{xy} > 0$，但在購買行為上卻被認為是替代品 $y_p > 0$ 或 $x_q > 0$；在消費者的心理感受上是獨立品 $U_{xy} = 0$，但在購買行為上卻被認為是替代品 $y_p > 0$ 或 $x_q > 0$，或是互補品 $y_p < 0$ 或 $x_q < 0$；或其他可能的錯誤解讀的狀況。

因此，必須放棄邊際效用遞減和「ALEP 互補性定義」等概念的理論，不是如一般經濟學家所認為的是建構消費者理論的充分理論，事實上，是會在解釋比較靜態的分析結果上，出現很大的紕漏的理論。

8. 完美的組合或陷入尷尬兩難的困境

無論如何，有些學者可能會因此認為，那「ALEP 互補性定義」在序數效用理論找

[9] 詳細的說明，請參考林忠正刊登於《民報》的文章〈什麼是真正的蘋果橘子經濟學？淺談新古典經濟學的消費者選擇理論〉。

不到生存空間的問題，就在基數效用理論出現之時獲得圓滿的解決了。

反正，不需要用到「ALEP 互補性定義」進行應用分析的時候，就採用序數效用理論的消費者選擇的標準模型進行分析，就理直氣壯地宣稱自己所採用的在預算限制下極大化總效用的模型屬於序數效用理論。而在必須用到「ALEP 互補性定義」進行應用分析的時候，就採用基數效用理論的消費者選擇的標準模型進行分析，就見風轉舵或退而求其次地宣稱自己所採用的在預算限制下極大化總效用的模型屬於基數效用理論。

我們現在已經有兩種不同的偏好排序的效用理論，它們各有一些優點可以彌補彼此的缺點。在這兩種效用理論合作無間之下，我們已經建構了完美完整的效用理論了。

這種看法，當然，是錯得十萬八千里的怪異論述。

例如，Bernardelli (1952)就清楚地反對這種看法，他指出：

> 但這個認知或認同導致了一個非常尷尬的兩難困境。效用僅可以以內含程度或強度的性質進入經濟學的方程式，如果U是效用的一個序數指標，那麼U的任何單調轉換將必須擁有相同的權利作為另一個(相同的)指標。但是，當我們選擇任意一個函數$F(u)$，它只受到條件$F'>0$的限制，接著我們會發現，只有關係式（2）保持原狀。在（3）和（4）的二階導數在轉換後，不一定能給出相同的方向(符號)。實際上，這些關係式…一般而言只有當$F''=0$時才會同時存在。但是，F的選擇受到這樣一個嚴格的限制會使得效用的序數性質當然變得毫無意義。如果這種限制是有效的，我們其實應該就會擁有一個可以基數測量的效用⋯所導致的明顯後果是，要不是說當我們在傳統意義上談到遞減的邊際效用和互補性時是在胡謅，就是說我們（非法地）假設效用具備一個基數的衡量方式。乍看之下(Prima facie)這種脫節不是很合理的。

換句話說，序數效用理論與基數效用理論各有嚴重缺失，使得現代效用理論陷入兩難的困境之中。[10]就如 Bernardelli (1934)所說的「**此時經濟學到達了十字路口 (At this point economics reaches cross roads.)**」，或 Bernardelli (1952)所說的「但這⋯導致了一個非

[10] 簡單回顧序數效用理論與基數效用理論的簡單發展史，可以促進與加深讀者對此問題的了解。有興趣的讀者，可以讀讀林忠正(2015) 介紹序數與基數效用理論發展史的論文與其他著作。

常尷尬的兩難困境。」 (But this … leads to a very awkward dilemma.)。一是勉強地採取序數效用理論的觀點，此時效用具有只能排序大小的優點，而沒有像長度一樣是可以衡量的缺點，但必須放棄一些被廣泛接受的邊際效用遞減等觀念以及建構在其上的相關古典理論，這是一種主張「截肢」的怪異理論；二是無奈地採取基數效用理論的觀點，此時可以保留被廣泛接受的邊際效用遞減等觀念與對應的相關古典理論，但必須接受效用像長度一樣是可以衡量的非常強烈的概念，而走回古典效用理論效用可衡量的老路。這兩條理論的道路都是有很大缺失的理論大道。

總結而言，現代兩種主要效用理論都有嚴重的缺失，而如何建構一套具有這兩種效用理論的優點而無其缺點的兩全其美的新效用理論的任務，仍然有待努力，甚至看來是一項不可能的任務。由於效用理論是個體選擇理論的基礎，個體選擇理論是現代其他目不暇給的經濟理論的基礎，位於最根基性的效用理論存在重大缺陷，這表示現代龐大的經濟理論體系是建構在不穩定的地基之上。此文的目的很單純，主要希望運用多種簡單的數學表述方式，來幫助不熟悉此問題的讀者深刻地了解與體認到現代效用理論與個體理論所面對的基本困境。

由 Pareto、Slutsky、Allen、Hicks、Samuelson 以及其他很多參與基礎理論建構與討論的偉大經濟學家所發動與鼓吹的序數總效用理論，因此並沒有真正成功地實現序數效用革命的長期夢想或理想。

效用是序數的概念是對的，但邊際效用遞減等概念也是對的，這兩項正確的概念不能並存，這表示序數效用革命的立足點可能出了問題，也就是序數效用可能適用於不恰當的對象(指應該直接用在邊際效用而非總效用上)，可能序數效用理論的出發點假設或第一項假設就出了差錯，因而一開始就走上錯誤的價值理論的重建道路。

當時參與序數與基數效用理論相關爭論的 Bernardelli (1938)就曾感慨地指出：「心理測量的問題及其對經濟理論的影響至今已被證明是最令人費解的謎團之一」(the problem of psychological measurement and its bearing on economic theory so far has proved to be one of the most puzzling riddles)。其實，不只在當時這是最大的一個謎團，這個謎團至今還未被成功地破解，正如最近 2014 年發表於經濟史期刊《政治經濟學史》(*History of Political Economy*)的一篇文章，作者 Hudík (2014, p.690)於文章結語中說：「最近試圖建構…的消費理論是否會導致重新引入邊際效用於消費行為的分析之中…。截至今天，這個問題仍然是處於等待被解答的狀態。」(the question whether recent attempts to construct …

consumer theory will lead to a reintroduction of marginal utility into analyses of consumer behavior… As of today, this question still open.)目前似乎大家已經將使用具有重大爭議的理論來進行應用分析的現象視為見怪不怪或當成理所當然的事了。

這一項非常重要的待解之謎，還是在等待經濟學的英雄人物來幫「ALEP 互補性定義」在序數(邊際)效用的家中找到合情合理的容身之地。效用理論是經濟學選擇理論的基石，解開此謎團，可能會從根本開始再次重新建構經濟學的個體選擇理論與後續的目不暇給的龐大經濟理論。

其實，所有這些奇奇怪怪的怪異互補性定義與論述的現象，都指向一件事實，現在的需求理論是一個具有嚴重根本性缺失的理論。而這缺失，可能就出在現代經濟理論的出發點的地方，也就是經濟學個體選擇理論的第一個假設就出錯了。

錯誤或怪異的需求理論革命，等待一場反革命或嶄新革命的誕生。

【附錄】Slutsky-Hicks 兩種商品消費模型的比較靜態分析的數學運算

「消費者在預算限制下極大化總效用」的決策或思維方式，設定如下：

(A1) $$\max_{x,y} \quad U(x,y);\quad U_x>0, U_y>0,\ s.t.\quad px+qy=M$$

將預算限制式 $y=M/q-xp/q$ 帶入效用函數之中，最適化問題可以改寫成：

(A2) $$\max_{x} \quad U(x, y=\frac{M}{q}-\frac{p}{q}x);\quad U_x>0, U_y>0$$

為計算方便，令：

(A3) $$A=U(x, y=\frac{M}{q}-\frac{p}{q}x)$$

接著，先計算一些我們隨後會用到的一些計算結果：

(A4) $$A_x = U_x(x, y = \frac{M}{q} - \frac{p}{q}x) - \frac{p}{q}U_y(x, y = \frac{M}{q} - \frac{p}{q}x)$$

對上式做全微分：

(A5) $$A_{xx}dx + A_{xM}dM + A_{xp}dp + A_{xq}dq = 0$$

接著，先計算一些我們隨後會用到的上一方程式中的相關變數：

(A6) $$\begin{aligned} A_{xx} &= U_{xx} - \frac{p}{q}U_{xy} - \frac{p}{q}U_{yx} + \frac{p^2}{q^2}U_{yy} = U_{xx} - 2\frac{p}{q}U_{xy} + \frac{p^2}{q^2}U_{yy} \\ &= \frac{1}{q^2}(q^2U_{xx} - 2pqU_{xy} + p^2U_{yy}) = \frac{H}{q^2} \end{aligned}$$

(A7) $$H = q^2U_{xx} - 2pqU_{xy} + p^2U_{yy} < 0$$

(A8) $$A_{xM} = \frac{1}{q}U_{xy} - \frac{p}{q^2}U_{yy} = \frac{1}{q^2}(qU_{xy} - pU_{yy})$$

(A9) $$\begin{aligned} A_{xp} &= -\frac{1}{q}U_y - \frac{1}{q}xU_{xy} + \frac{p}{q^2}xU_{yy} = -\frac{1}{q^2}(qU_y + qxU_{xy} - pxU_{yy}) \\ &= -\frac{1}{q^2}[qU_y + x(qU_{xy} - pU_{yy})] \end{aligned}$$

(A10) $$\begin{aligned} A_{xq} &= \frac{p}{q^2}U_y + (-\frac{M}{q^2} + \frac{p}{q^2}x)U_{xy} - \frac{p}{q}(-\frac{M}{q^2} + \frac{p}{q^2}x)U_{yy} \\ &= \frac{1}{q^2}[pU_y + (-M + px)U_{xy} - \frac{p}{q}(-M + px)U_{yy} \\ &= \frac{1}{q^2}[pU_y - (M - px)U_{xy} + \frac{p}{q}(M - px)U_{yy}] \\ &= \frac{1}{q^2}[pU_y - qyU_{xy} + \frac{p}{q}qyU_{yy}] = \frac{1}{q^2}[pU_y - qyU_{xy} + pyU_{yy}] \\ &= \frac{1}{q^2}[pU_y - y(qU_{xy} - pU_{yy})] = -\frac{1}{q^2}[-pU_y + y(qU_{xy} - pU_{yy})] \end{aligned}$$

在另一方面，將預算限制式$x = M/p - yq/p$帶入效用函數之中，最適化問題也可以改寫成：

(A11) $$\max_{y} \quad U(x=\frac{M}{p}-\frac{q}{p}y, y); \quad U_x > 0, U_y > 0$$

為計算方便，令：

(A12) $$B = U(x=\frac{M}{p}-\frac{q}{p}y, y)$$

接著，最適化的一階條件為：

(A13) $$B_y = -\frac{q}{p}U_x(x=\frac{M}{p}-\frac{q}{p}y, y) + U_y(x=\frac{M}{p}-\frac{q}{p}y, y) = 0$$

對上式做全微分：

(A14) $$B_{yx}dx + B_{yM}dM + B_{yp}dp + B_{yq}dq = 0$$

接著，先計算一些我們隨後會用到的上一方程式中的相關變數：

(A15) $$\begin{aligned} B_{yy} &= \frac{q^2}{p^2}U_{xx} - \frac{q}{p}U_{xy} - \frac{q}{p}U_{yx} + U_{yy} = \frac{q^2}{p^2}U_{xx} - 2\frac{q}{p}U_{xy} + U_{yy} \\ &= \frac{1}{p^2}(q^2U_{xx} - 2pqU_{xy} + p^2U_{yy}) = \frac{q^2}{p^2}A_{xx} = \frac{H}{p^2} \end{aligned}$$

(A16) $$H = q^2U_{xx} - 2pqU_{xy} + p^2U_{yy} < 0 \text{ 且 } p^2B_{yy} = q^2A_{xx} = H$$

(A17) $$B_{yM} = -\frac{q}{p}\frac{1}{p}U_{xx} + \frac{1}{p}U_{yx} = \frac{1}{p}U_{yx} - \frac{q}{p^2}U_{xx} = \frac{1}{p^2}(pU_{yx} - qU_{xx})$$

(A18) $$\begin{aligned} B_{yp} &= \frac{q}{p^2}U_x + \frac{q}{p}(\frac{M}{p^2} - \frac{q}{p^2}y)U_{xx} - (\frac{M}{p^2} - \frac{q}{p^2}y)U_{yx} \\ &= \frac{1}{p^2}[qU_x + \frac{q}{p}(M-qy)U_{xx} - (M-qy)U_{yx}] \\ &= \frac{1}{p^2}[qU_x + \frac{q}{p}(px)U_{xx} - (px)U_{yx}] = \frac{1}{p^2}[qU_x + qxU_{xx} - pxU_{yx}] \\ &= \frac{1}{p^2}[qU_x - x(pU_{yx} - qU_{xx})] = -\frac{1}{p^2}[-qU_x + x(pU_{yx} - qU_{xx})] \end{aligned}$$

$$B_{yq} = -\frac{1}{p}U_x + \frac{q}{p^2}yU_{xx} - \frac{1}{p}yU_{yx} = \frac{1}{p^2}[-pU_x + qyU_{xx} - pyU_{yx}]$$

(A19)
$$= -\frac{1}{p^2}[pU_x - qyU_{xx} + pyU_{yx}] = -\frac{1}{p^2}[pU_x + pyU_{yx} - qyU_{xx}]$$

$$= -\frac{1}{p^2}[pU_x + y(pU_{yx} - qU_{xx})]$$

應用上述的計算結果，最適化的一階條件要求：

(A20) $$\frac{U_x(x,y)}{U_y(x,y)} = \frac{p}{q}$$

(A21) $$px + qy = M$$

二階條件要求無異曲線凸向原點，即：

(A7) $$H = q^2U_{xx} - 2pqU_{xy} + p^2U_{yy} < 0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：

(A22) $$x_M = -\frac{A_{xM}}{A_{xx}} = \frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{-H} \gtrless 0$$

(A23) $$y_M = -\frac{B_{yM}}{B_{yy}} = \frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{-H} \gtrless 0$$

價格變動對購買數量的效果為：

(A24) $$x_p = -\frac{A_{xp}}{A_{xx}} = \frac{qU_y}{H} + x\frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{H} = \frac{qU_y}{H} - xx_M \gtrless 0$$

(A25) $$y_p = -\frac{B_{yp}}{B_{yy}} = -\frac{qU_x}{H} + x\frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{H} = -\frac{qU_x}{H} - xy_M \gtrless 0$$

(A26) $$x_q = -\frac{A_{xq}}{A_{xx}} = -\frac{pU_y}{H} + y\frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{H} = -\frac{pU_y}{H} - yx_M \gtrless 0$$

(A27) $$y_q = -\frac{B_{yq}}{B_{yy}} = \frac{pU_x}{H} + y\frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{H} = \frac{pU_x}{H} - yy_M \gtrless 0$$

Reference

林忠正，(2014)，「什麼是真正的蘋果橘子經濟學？淺談新古典經濟學的消費者選擇理論」，民報。

林忠正，(2015a)，《古典可測量的效用理論的故事》，撰寫中專書。

林忠正，(2015b)，《序數效用理論的故事》，撰寫中專書。

林忠正，(2015c)，《基數效用理論的故事》，撰寫中專書。

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(1)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(2)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色：難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(3)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(I)：效用極大化的 Marshall 模型與無意義的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(4)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(II)：Marshall 的「邊際需求價格」模型與古典效用可衡量概念的意義〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(5)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為 Marshall 需求理論編寫一冊返回經濟學舞台的劇本： 比較商品效用與價格效用的邊際摸索決策方式的 Marshall 模型〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(6)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法：完成序數效用革命理論的誕生〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(7)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈經濟學新的跨界十字交叉(A New Cross-Cross)圖形：取代無異曲線圖示的跨界序數邊際效用分析法的新圖示〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(8)，研討論文。

邢慕寰譯，1967，《價值與資本》(Value and Capital)，台北市：台灣銀行經濟研究室。

Allen, R.G.D. (1934) “A Comparison between Different Definitions of Complementary and Competitive Goods,” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 2:2, pp. 168-175.

Bernardelli, H. (1934) “Notes on the Determinateness of the Utility Function: II,” *Review of Economic Studies*, 2, pp. 69–75.

Bernardelli, H. (1938) “The End of the Marginal Utility Theory?,” *Economica*, 5:18, pp. 192-212.

Bernardelli, H. (1952) “A Rehabilitation of the Classical Theory of Marginal Utility,” *Economica*, 19:75, pp. 254-268.

Edgeworth, F.Y. (1925) *Papers Relating to Political Economy*, London: Macmillan.

Hicks, J.R. (1939) *Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*, Oxford: Clarendon Press.

Hudík, M. (2014) “Reference-Dependence and Marginal Utility: Alt, Samuelson, and Bernardelli,” *History of Political Economy*, 46:4, pp. 677-693.

Lancaster, K. (1953) “A Refutation of Mr. Bernardelli,” *Economica*, 19, pp. 259–262.

Pareto, V. ([1909] 1971) *Manual of Political Economy*, New York: Kelley.

Samuelson, P.A. (1938) “The Numerical Representation of Ordered Classifications and the Concept of Utility,” *Review of Economic Studies*, 6, pp. 65–70.

Samuelson, P.A. (1974) “Complementarity: An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory,” *Journal of Economic Literature*, pp. 1255-1289.

Schultz, H. (1935) “Interrelations of Demand, Price, and Income,” *The Journal of Political Economy*, 43:4, pp. 433-481.

Silberberg, E. (1978) *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, McGraw-Hill.

Varian, H.R. (1996) *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*, W&W Norton.