

跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法

完成序數效用革命理論的誕生

林忠正*

中央研究院經濟所研究員

國立政治大學財政系教授

國立交通大學經營管理研究所教授

台北市南港區(115-41)研究院路2段128號

中央研究院經濟所

電話: 886-2-2782-2791 轉 507

電子信箱: cclin@econ.sinica.edu.tw

開始撰稿-2015年10月3日

完稿時間-2015年12月31日

列印時間-2016年2月2日



*謝謝林曉珮助理非常有效率的協助。雖然跨界理論在我的思維與文字中已存在一段時間，但這項理論能真正推出，政治大學應用數學系曾正男老師是非常關鍵的貢獻者，透過與他的討論讓我堅定地走上這樣的理論思路。我預期他會是提出此新效用理論完整公設證明的最主要貢獻者。政治大學經濟系王信實老師，在此理論的發展過程中，也扮演著非常重要的角色。

跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法

完成序數效用革命理論的誕生

[摘要]以「消費者追求預算限制下極大化總效用的模型」來描述個人的選擇情境與目標，配合以選項的邊際效用之比等於其相對價格(或每個選項的邊際效用與價格之比相等)的均衡條件來刻劃個人選擇的最佳化決策方式，向來是經濟學家所主要採用的個體選擇的分析與教學架構。此分析架構中所謂的效用或效用函數有序數效用理論與基數效用理論兩種現代詮釋。在序數效用理論中效用數據有只能排序大小的優點，但此優點與邊際效用遞減法則無法共存。序數效用理論必須排斥邊際效用遞減法則的特性，被一些經濟學家批評是一種「截肢」或「把效用可衡量的骯髒洗澡水與邊際效用的真實嬰兒一起倒掉」的怪異理論。基數效用理論有可以與邊際效用遞減法則並存的優點，但基數效用如長度一樣是一種相當強烈的可衡量的概念，效用可衡量一直被視為一種落伍的不切實際的標誌。並且 Samuelson (1938)明確地指出在真實人生中構成基數效用所需添加的假設出現的機率幾乎為零，因此以極端負面字眼來論斷基數效用理論成立的機會是「無限地不可能的」(infinitely improbable)。兩種主要的現代效用理論各有其嚴重的缺陷，如何建構一套擁有這兩種效用理論的優點而無其缺點的兩全其美的新效用理論的任務，一直沒有明顯的進展，甚至被認為是一項不可能的任務。效用理論是個體選擇理論的根基，個體選擇理論又是後續目不暇給的經濟學選擇理論的根基，效用理論有大問題表示巨大的經濟理論的體系是建立在不穩定的基石上。因此尋找更好的基石以重建更好的經濟理論無論是多麼艱難的研究任務，還是值得前仆後繼努力以赴的研究志業。本文嘗試提出一種有兩種舊效用理論的優點而無其缺點的新效用理論—**跨價值觀的「得」與「失」的序數邊際效用分析法**—以邁向實現此不可能任務之路。

JEL 分類: B120, B130, B210, D010

關鍵詞: 跨界、得與失、序數、基數、邊際效用

我們目前的經濟理論，並非早就注定的。假若幾年前，經濟學在關鍵的分岔點上，選擇了另一個轉折，那我們今天有可能就會鼓吹不同的經濟理論。

—Mark Blaug (2001)

普林斯頓物理學家約翰惠勒(John Wheeler)寫道：

在這一切的背後
肯定有個十分單純的概念
那麼美好
那麼令人信服，於是在
十年，百年
或千年期間
當我們領會了
我們都會相互表示
怎麼還可能有別的想法？
我們怎麼那麼笨
那麼久都想不通？

最深奧的理論，好比牛頓的重力理論和愛因斯坦的相對論，全都像惠勒描述的那麼單純。

「困難不是在新的想法，而是在從那些培育我們大多數人成長茁壯而且已經盤根糾結地融入我們的心靈的每一個角落的舊理念的束縛中逃逸(逃脫)而出。」(The difficulty lies, not in the new ideas, but in escaping from the old ones, which ramify, for those brought up as most of us have been, into every corner of our minds.)

—Keynes (1936)

1. 為什麼需要一種新的個體選擇理論

「消費者在預算限制下極大化總效用的基本分析架構」一直是經濟學家分析個體選擇行為的基本分析典範。但很少人會認真思索此分析架構中所謂的效用或效用函數到底所指為何？效用在此描述消費者的滿足或幸福度，但滿足或幸福是一種感覺，感覺怎能用「效用數字」來加以刻劃呢？

我們可以在經濟思想史上找到三種主要的詮釋：古典的可衡量的效用概念、序數效用概念、以及基數效用概念。

首先，古典的效用理論是假設存在著一個標準的效用單位可作為衡量單位，以測量另一事物或對象的比值(即其效用)，所以是一種效用可衡量的理論，但存在著一個標準效用單位的想法備受爭議，因此古典效用理論被視為是一種落伍的膚淺論述。

其次，序數效用理論主張消費者有能力對各種不同的商品組合進行偏好排序，此時效用數值只有大小次序有意義(兩個效用數值之間的差值與比率的大小都無意義)的優點，但卻不能容許常識性的邊際效用遞減原則與採用交叉邊際效用項的正負來定義互補品與替代品的正常概念的存在，一項理論竟然不能容許常識性的概念，或許對任何非此理論的盲目信仰者而言，這當然顯示此理論存在著基本的缺陷。序數效用理論必須排斥邊際效用遞減法則的特性，被批評是一種「截肢」(Bernardelli, 1934, 1938)或「把效用可衡量的骯髒洗澡水與邊際效用的真實嬰兒一起倒掉」(Rothbard, 1956)的怪異理論。

最後，基數效用理論主張消費者不只有能力對不同的商品組合進行排序，同時，還有能力對不同的商品組合的移轉進行偏好排序，此時可以救回邊際效用遞減等常識性概念，但效用(只能進行正向線性轉換)卻又變成如公分等長度概念一樣是可以衡量的，這等於走回頭路又回到原先避之唯恐不及的充滿爭議的效用可衡量的老路，所以也是一種有明顯缺陷的效用理論。並且，Samuelson (1938)明確地指出在真實人生中構成基數效用所需添加的假設出現的機率是「無限地不可能的」(infinitely improbable)。

一言以蔽之，經濟學發展至今沒有一項沒有明顯缺陷(更不用說完美)的效用理論。但是，更嚴重的問題，卻是，效用理論是個體選擇理論的基礎，而個體選擇理論是其他講究「個體基礎」的後續龐大經濟理論的基礎。

這三種效用理論都有明顯的缺陷，這可能隱含「消費者在預算限制下極大化總效用的分析典範」是一個具有嚴重缺陷的分析架構，那有沒有其他的個體選擇行為的基本分析架構可以取而代之呢？我們介紹林忠正、曾正男、王信實、陳政弘與蘇弘綸等所參與論的「跨界的」「一得」與「一失」的交換的序數邊際效用邊際摸索分析架構，在這一篇文章中我介紹此分析架構的最基本的消費者選擇模型。藉著明確證明為什麼在新的效用理論所衍生的新分析架構之下，可以給邊際效用遞減法則合情合理的棲身之處。經濟理論因此可以再次重新建構在古典的邊際效用遞減的概念之上，當然必須引入嶄新的跨界的偏好排序概念來合理地給予邊際效用遞減法則正式的名份。

接著，先簡單回顧相關文獻以介紹常識性的邊際效用遞減法則，為何在現代理論中會變成一個棄嬰，而隨著效用可衡量的骯髒洗澡水的概念一起毫不可惜地被倒掉的原因。

2. 簡單的文獻回顧：為什麼「邊際效用遞減」概念如此不堪

Jean-Sébastien Lenfant (2006)在一篇發表於《政治經濟史》(*History of Political Economy*)名為〈互補性和需求理論：從 20 世紀 20 年代至 40 年代〉(Complementarity and demand theory: From the 1920s to the 1940s)的經濟史論文中，於文章開頭的地方提到：「消費需求理論的歷史通常被看作是從簡單的馬歇爾設計轉變至功能強大的希克斯形式的需求理論的表述方式。曾經，有人這樣說，馬歇爾形式的『需求法則』遇到序數主義的原則，通過序數原則逐步將馬歇爾形式的『需求法則』改造成具有現代科學所有屬性的一個美麗的需求理論。」也就是，需求法則由建立在邊際效用遞減法則的核心概念之上的 Marshall 式的需求理論，被逐漸地取代或革命性地轉化為建立在邊際替代率遞減法則的核心概念之上的 Hicks 式的需求理論。

與 Hicks 和 Allen 一同參加 Robins 在倫敦政經學院所舉辦的研討會的一位同輩經濟學家，Bernadelli (1938)曾在英國倫敦政治經濟學院所發行的《經濟學刊》(*Economica*)中，發表〈邊際效用理論告終了嗎？〉(The End of the Marginal Utility Theory?)的文章，於文章一開頭的地方寫道：

最近對價值理論的研究成果已經使人們開始懷疑，邊際效用概念是否能為經濟理論提供一個適當的基礎。最近的研究成果顯示邊際效用概念至今一直被使用在數理經濟學的方式，是有爭議的，並且是不

相容於效用事實上是不能以任何形式測量的一種密集度的、心理幅度的概念。據聲稱價值理論已經被重新建構，使得總效用和邊際效用基本上是不可測量的特性在理論中已經是沒有任何可受懷疑的空間了，並且新理論應該已經顯示這兩概念之一，或兩者，都不能適合於重新建構的理論框架中。最近對價值理論的研究成果所得出的結論是，它們必須被消除因為是「無意義的」(meaningless)和「不科學的」(unscientific)。¹

邊際效用遞減法則為何會從 Marshall 式的需求理論的核心概念，轉變成是一種「無意義的」(meaningless)和「不科學的」(unscientific)概念，而應該被加以拋棄，並以邊際替代率的概念加以取代。

一個易於理解的方式，是由序數效用革命開始進行討論，簡要回顧與介紹關於序數效用革命與邊際效用遞減法則的興衰關係，以及持不同立場的經濟學家之間的精采爭辯。

序數效用革命是由 Pareto (1909/1971)所發起而由 Hicks and Allen (1934)發揚光大。Pareto 是第一位發現無異曲線所對應的效用數值具有序數效用的特性的經濟學家，他體會到在圖形上位置愈高的無異曲線所包含的商品組合愈受消費者的青睞或偏好，所以只要給予愈高位置的無異曲線所包含的商品組合愈高的效用數值，就足以用來表示特定的偏好關係。這些代表同一組的無異曲線的效用數值只有相對大小或排列次序有意義，效用數值之間的差值大小沒有任何意義，這種只有數值相對大小或次序有意義的效用概念，就是序數效用的概念。因此我們了解到，序數效用的「**第一個假設**」是經濟個體有能力對不同的選項組合進行偏好或效用排序。任何一個序數效用函數經過任何正向單調轉換(monotonic transformation)後所對應的新函數還是可以維持或表示原來的偏好次序。

Pareto 率先發現不可衡量性的序數效用概念，但卻沒有將由古典的效用可衡量概念進步至序數效用概念下，需求理論所需進行的重整或重建工作加以完成。

¹ Recent inquiries, into the theory of value have made it appear doubtful whether the marginal utility concept provides a suitable basis for economic theory. The way in which this concept has been used in mathematical economics so far, it is contended, is incompatible with the fact that utility being an intensive, psychological magnitude cannot be subjected to any form of measurement. The theory of value, it is claimed, has to be reconstructed so that no doubt is left as to the fundamental immeasurability of total and marginal utility, and if it should turn out that either of these two concepts, or both, cannot be fitted into the reshaped framework, it is concluded that they must be eliminated as “meaningless” and “unscientific.”。

在英語世界中，Hicks and Allen (1934)接續 Pareto 未完成的工作，由無異曲線的序數效用概念出發，進行需求理論的重建志業。其中，Hicks and Allen (1934)發現邊際效用遞減與 Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto 所採取的以總效用的交叉二次微分項的正負來定義替代品與互補品的概念，是不能與效用只能排序的序數效用核心理念並存，必須加以棄置。

這就是為什麼，由 Allen (1934, *Econometrica*)與 Hicks and Allen (1934, *Economica*)開始，很多經濟學家主張放棄「邊際效用遞減法則」的關鍵原因。

必須放棄邊際效用遞減法則是一項具有重大爭議的做法。很多經濟學家深深以為不可，例如 Hicks 和 Allen 的同輩經濟學家 Bernardelli (1952)，就認為邊際效用遞減原則是他在幼稚園年紀就能了解的經濟學基本原理，因此 Bernardelli (1934, 1938)認為放棄邊際效用遞減等觀念是一種的「截肢」(amputation)的不正常手法，是故意砍斷一條腿以試試看能走得多好的怪異理論，這種做法沒有正當性更不是一項美德。Bernardelli 強調，一項理論容不下這麼正常的邊際效用遞減概念，這不是表示邊際效用遞減的原則是錯的，而是應該說某人的理論是錯的。

對序數效用理論的反對意見，促成了基數效用理論的發展。基數效用的「**最基本的主張**」有兩項：第一項假設主張，個人有能力對不同選項組合進行排序（如序數效用理論），除此之外，第二項假設宣稱，個人還有能力對任何兩個選項組合的變化或移轉進行排序。一個基數效用函數經過任何正向線性轉換(positive linear transformation)所對應的新函數還是可以維持或代表原來的偏好次序。

雖然藉由引入人們有能力對任何兩個選項組合的變化進行偏好排序的額外假設的基數效用理論，可以拯救常識性的邊際效用遞減法則。但是基數(總)效用的概念也沒有為經濟理論帶來完美的結局，因為基數效用理論也為此付出了龐大的很多經濟學家認為是無法接受或難以承受的代價。

在 1930 年代，主要在倫敦政經學院所發行的知名期刊《經濟研究期刊》(*Review of Economic Study*)中，紀錄的一場關於〈效用函數的可確定性〉(The determinateness of the utility function)的辯論，經由 Lange (1934a)、Phelps Brown (1934)、Lange (1934b)、Allen (1935)、Alt (1936)、Samuelson (1938)等人的討論，導致基數效用理論的誕生，也深入了解與澄清了導致基數效用理論所需的條件(或公設)以及其效用可衡量的特性。

Lange (1934a)首先提出由偏好排序概念出發的基數效用概念，在假設人們具有對不同的商品組合與不同組合之間的移轉進行排序能力的假設下，會出乎意料之外的使效用變成可衡量的概念。參與討論的 Allen (1935)，非常深刻且清楚地指出，正向線性轉換就是公分與公尺等長度概念所具有的基本性質。這表示基數效用是與長度的概念如公分與公尺一樣，是表示個人有能力分辨任何兩個效用差異(類似長度)的比例，因此效用此時變成是一種相當強烈的可衡量的概念。而 Samuelson (1938)也認為在真實人生中構成基數效用所需添加的「串聯性條件」出現的機率幾乎為零，因此稱只能進行正向線性轉換的基數效用理論是「無限地不可能的」(infinitely improbable)。

藉由上述簡單的序數與基數效用理論發展史的簡單介紹與討論，我們可以了解到，現代兩種主要效用理論各有其嚴重的缺陷，而使現代經濟理論陷入如 Bernardelli (1952)所說的「但這...導致了一個非常尷尬的兩難困境。」(But this ... leads to a very awkward dilemma.)。一是勉強地採取序數效用理論的觀點，此時效用具有只能排序大小的優點，而不會像長度一樣是可以衡量的缺點，但必須放棄一些被廣泛接受的邊際效用遞減等觀念以及建構在其上的相關古典理論，這是一種主張「截肢」的怪異理論；二是無奈地採取基數效用理論的觀點，此時可以保留被廣泛接受的邊際效用遞減等觀念與對應的相關古典理論，但這樣的效用函數在現實世界中是非常難以出現的，並且必須接受效用像長度一樣是可以衡量的非常強烈的概念，而走回古典效用理論效用可衡量的飽受批評的老路。這兩條理論的道路都是有很大缺失的理論大道。

經濟學發展迄今，雖然一些頂尖經濟學家竭盡所能，但還沒能發展出更好的效用理論，可以走出這個兩難的困境。Bernardelli (1938)就曾感慨地指出：「心理測量的問題及其對經濟理論的影響至今已被證明是最令人費解的謎團之一」(the problem of psychological measurement and its bearing on economic theory so far has proved to be one of the most puzzling riddles)。他嘗試提出解決方案，但非但沒有引起共鳴，還因為所使用的總效用的二次微分項的怪異的數學定義，遭到如 Samuelson (1939)、Lancaster (1953)等人的不少冷嘲熱諷。

例如，Bernadelli (1938)在〈邊際效用理論告終了嗎？〉(The End of the Marginal Utility Theory?)的文章中，指出「...我還有一句話應該要表達出來。教科書是否有必要重新改寫呢？(Would it be necessary to rewrite the textbooks?)我傾向於認為這樣的看法過於純粹主義。一般來說，要科學脫離一個深入人心的傳統不是一個好建議。」並提出邊際效用

的另一種的定義方式，申辯說，就只要如此簡單地重新以另一種方式定義邊際效用的概念，²就足以救回邊際效用遞減等概念。

但是，很快地，Samuelson (1939)就撰文指出 Bernardelli 的新做法還是無法通過單調線性轉換後，總效用的二次微分項正負符號會改變的特性。所以 Samuelson (1939)很不客氣地以很傷人的語氣說：「我很害怕，所以，關於 Bernardelli 先生的問題答案是肯定的，教科書仍然需要重寫，而這是一件他多麼希望能夠避免的事啊。」³

十多年之後，Bernardelli 並不死心再次重裝出擊，Bernadelli (1952)又在《經濟學刊》(*Economica*)中，發表〈邊際效用理論的復興〉(A Rehabilitation of the Classical Theory of Marginal Utility)的文章，在論文一開始的引言中，更進一步批評序數效用分析法是一種安徒生的童書《國王新衣》(*The Emperor's New Clothes*)等級的荒謬理論，暗喻支持的經濟學家不如敢天真且誠實地大聲地喊出：「國王什麼都沒穿」的純真小孩。在 Bernardelli (1952)該論文的結論時，他甚至有感而發地沉痛地呼籲經濟學家：

這是責無旁貸的事，所有那些正忙著編織經濟理論的新衣服的人，應該將他們自己創作的引人入勝的新奇工具放在一旁，並停下來想一想或反省反省，他們正真正在做什么事。事實上，所有作者一直硬將經濟學的問題強迫性地塞入偏好尺度和邊際替代率的緊身衣中，特別是那些似乎最近因為被啟發而接受這樣的尺度的作者們，都應特此鄭重合法地暫停他們的勞動，直到他們有義務能夠圓滿地回答以下的問題：為什麼任何人都應該被限制去遵守唯有無異曲線的斜率的性質才應該被使用來公式化經濟學法則的幻象的規則（其中似乎沒有什麼權威可言）？⁴

² 詳見 Bernardelli (1939)，第 88 頁。

³ Samuelson (1939) "I am very much afraid, therefore, that the answer is yes to Mr. Bernardelli's question, and that the text-books still need that rewriting which he hoped so much to avoid."。

⁴ It is indispensable that all those who are busily weaving the new garments of economic theory should lay aside the fascinating novel tools of their creation, and pause to reflect as to what they are really doing. In fact, all writers who have been forcing the problems of economics into the straightjacket of preference scales and of marginal rates of substitution, and in particular those authors who lately seem to receive such scales by revelation, are herewith solemnly and legitimately suspended from their labour, until they shall have answered satisfactorily the question: why should anybody be constrained to observe the fancy rule (for which there appears to be no authority whatever) that only properties of the slopes of indifference curves should be used in the formulation of the laws of economics?

雖然 Bernardelli 極度想要挽救邊際效用遞減等觀念的奮鬥，直到現在還是被定論為功敗垂成的無力反擊，但他的努力至少深刻地反映一些經濟學家對必須放棄常識性的經濟概念的做法深深的不解與強力的反彈，以及想拯救邊際效用遞減的概念所付出的長期不歇的努力。⁵

Bernardelli 在〈邊際效用理論的復興〉(A Rehabilitation of the Classical Theory of Marginal Utility)的文章中，嘗試提出兩種不同切入點的新方法，⁶企圖在效用是序數不可測量的概念下，救回邊際效用遞減原則。但是再次令他失望的是他的努力並沒有獲得認同。並且因為一些怪異的一次與二次微分項的數學表達方式，再次受到 Lancaster (1953) 的毫不留情面的譏笑。

Lancaster (1953)就強烈批評說：

…只要古典邊際效用的方法並沒有苦於被現代價值理論所強調的無能或障礙，部分的(古典)經濟理論將是非常精簡的。但是，它真的為這些無能所苦，並且這件事不論 Bernardelli 博士或其他任何人都是無能為力的。⁷

至今，正如 Lancaster (1953)所強調的：「這件事不論 Bernardelli 博士或其他任何人都是無能為力的。」這個經濟學「至今已被證明是最令人費解的謎團之一」的謎團。不只在理論草創當時這是最大的一個謎團，這個謎團至今還未被成功地破解，正如最近 2014 年發表於經濟史期刊《政治經濟學史》(*History of Political Economy*)的一篇文章，作者 Hudík (2014, p.690)於文章結語所說的：「最近試圖建構…的消費理論是否會導致重新引入邊際效用於消費行為的分析之中…。截至今天，這個問題仍然是處於等待解答的

⁵ Rothbard (1956/1997/2002)以提出另一種邊際效用的定義，試圖解決此問題。另外...以商品是為了滿足慾望(wants)，慾望才是直接影響效用的原因的 ordinal marginal utility，企圖提出解決方式。這些作者通常被歸類為奧地利學派。

⁶ 詳見 Bernardelli (1952)，第 256 和 258 頁。

⁷ In a recent issue of this journal, Dr. H. Bernardelli attempts what he describes as “A Rehabilitation of the Classical Theory of Marginal Utility”. Far from rehabilitating the theory, however, he does nothing for it, and merely baffles the unsophisticated reader with specious and misleading mathematics... Once before, also in this journal, Dr. Bernardelli attempted to rehabilitate the classical theory of marginal utility, by constructing and manipulating some rather forbidding mathematical functions. In this case, his attempts were criticised by Professor Samuelson ... It would be very neat for parts of economic theory if only the classical marginal utility approach did not suffer from the disabilities emphasized by the modern value theorists. However, it does suffer from those disabilities, and there is nothing that Dr. Bernardelli, or anyone else, can do about it.

狀態。」⁸目前似乎大家已經將使用具有重大爭議的理論來進行應用分析的現象視為見怪不怪或當成理所當然的事了。

現代個體經濟理論與強調個體基礎的總體理論，因此是建構在很不完美的不穩定的效用理論的根基上，一些經濟學家並不清楚自己所應用的經濟理論究竟是序數效用理論或是基數效用理論，一些經濟學家不知道兩種效用理論有如此重大的缺陷。因此，正如 Bernardelli (1952)所說的：他們自己並不知道「**他們真正在做什麼事。事實上，所有作者一直硬將經濟學的問題強迫性地塞入偏好尺度和邊際替代率的緊身衣中**」。

由 Pareto、Slutsky、Allen、Hicks、Samuelson 以及其他很多參與基礎理論建構與討論的等偉大經濟學家所發動與鼓吹的序數總效用理論，因此並沒有真正成功地實現序數效用革命的長期夢想或理想。反而是如 Rothbard (1956)既傳神又貼切的批評「在 20 世紀 30 年代初由 Hicks 和 Allen 所領導的序數效用主義者的叛軍，覺得有必要推翻邊際效用本身以及可測量性的概念。他們如此的作為，等於是將效用的嬰兒與基數的洗澡水一起倒掉。」(The ordinalist rebels, led by in the early 1930, felt it necessary to overthrow the very concept of marginal utility along with measurability. In doing so, they threw out the Utility baby with Cardinal bathwater.)。

效用是序數的概念是對的，但邊際效用遞減等概念也是對的，這兩項正確的概念不能並存，這表示序數效用革命的立足點可能出了問題，也就是序數效用可能是被用於不恰當的對象(指應該直接用在邊際效用而非總效用上)，可能序數效用理論的出發點假設或第一項假設就出了差錯，因而一開始就走上錯誤的價值理論的重建道路。

在接下來的簡單模型中，我希望能提出非常具有說服力的簡單模型，首次合理地解開經濟理論至今最令人費解的一項謎團。

但在進入介紹新的理論之前，我們先簡單說明為何在現代的序數與基數效用理論中，看來很正常的邊際效用遞減法則卻是一種很不討好的令人頭疼的概念。

⁸ ...the question whether recent attempts to construct ... consumer theory will lead to a reintroduction of marginal utility into analyses of consumer behavior... As of today, this question still open.

3. 為何邊際效用遞減法則難覓合理的棲身之地

我們以一個能捕捉 Marshall 需求理論基本精神的特殊的消費者選擇模型，明確地展示為何在序數與基數效用理論中難覓合理的容身之地的緣故。

3.1 Marshall 需求曲線

假設一位擁有財富或所得水準 M 元的消費者，在面對單位價格是 p 元的 x 商品時，如何決定購買多少數量的 x 商品以及保留多少現金或所得 m 。

一個特殊的消費者選擇模型設定如下：

$$(1) \quad \max_{x,m} U(x,m) = u(x) + v(m); \quad s.t. \quad px + m = M$$

其中，效用函數的一些性質是 $U_x = u_x > 0$ ， $U_{xx} = u_{xx} < 0$ ， $U_m = v_m > 0$ ， $U_{mm} = v_{mm} \leq 0$ ， $U_{xm} = U_{mx} = 0$ 。這個特殊模型有以下的一些主要特色。一是商品與現金的效用是可分離相加的(additive separable)效用函數，亦即彼此不會影響彼此的邊際效用 $U_{xm} = U_{mx} = 0$ ；二是商品的邊際效用為正 $U_x = u_x > 0$ 但邊際效用遞減 $U_{xx} = u_{xx} < 0$ ；三是現金或貨幣的邊際效用是正 $U_m = v_m > 0$ 但邊際效用遞減或為常數 $U_{mm} = v_{mm} \leq 0$ 。

將預算限制式 $m = M - px$ ，代入效用函數中，模型變成：

$$(2) \quad \max_x U(x, M - px) = u(x) + v(M - px)$$

令 $A \equiv U(x, M - px)$ ，一階條件為：

$$(3) \quad A_x = U_x - pU_m = u_x(x) - pv_m(m) = 0 \quad \text{或} \quad \frac{U_x}{U_m} = \frac{u_x}{v_m} = p$$

具有內部解時，二階條件要求：

$$(4) \quad A_{xx} = U_{xx} - 2pU_{xm} + p^2U_{mm} = u_{xx} + p^2v_{mm} < 0$$

簡單的計算可得，價格變動對購買數量的效果為：

$$(5) \quad x_p = \frac{U_m + x(U_{xm} - pU_{mm})}{A_{xx}} = \frac{v_m - xp v_{mm}}{A_{xx}} = \frac{v_m}{u_{xx}} < 0, \text{ if } v_{mm} = 0$$

因為，一是商品與現金的效用是可分離相加的效用函數，亦即彼此不會影響彼此的邊際效用 $U_{xm} = U_{mx} = 0$ ；又加上 Marshall 色彩的購買商品的數量很少時，購買前後的所得變化很小，所以貨幣的邊際效用可設為維持不變，即 $v_{mm} = 0$ 。

此時，我們可以獲得，價格愈高需求量愈少的結果，需求線是負斜率，這就是需求法則的呈現。這是商品邊際效用遞減所導致的結果。這是 Marshall 需求理論的重現。但是，Marshall 需求理論被普遍批評為是一種效用可衡量的落伍的理論，是現在被掃進歷史的塵埃中的被棄置的不合宜理論。

這是為什麼呢？簡單地說，因為邊際效用遞減法則違反效用只能排序的效用不可衡量的序數效用理論的基本精神。

3.2 單調轉換

序數效用理論的基本精神是數值相對大小次序一樣的總效用函數都可以用來表示相同的偏好關係。以數學的觀點來看，一個序數效用函數經過任何的正向單調轉換後的新效用函數都可以用來表示同樣的偏好關係。

以一般化的數學方程式，正向單調轉換的關係式可表現為：

$$(6) \quad V(x, m) = F(U(x, m)) = F(u(x) + v(m)); \quad F' > 0, F'' \geq 0$$

$U(x, m)$ 是原先的總效用函數，而 $V(x, m)$ 藉由 $F(U)$ 的正向單調轉換後所得到的新總效用函數，正向單調轉換的特性反映在轉換函數 $F(U)$ 的一階導數為正 $F'(U) > 0$ 的特性上。二階導數的正負則完全不會影響單調正向轉換的特性，所以 $F'' \geq 0$ 。

對總效用 $U(x, m)$ 進行正向單調轉換使它變成 $V(x, m)$ 之後，會衍生出以下的關係式：

$$(7) \quad V_x = F'U_x = F'u_x, \quad V_m = F'U_m = F'v_m$$

$$(8) \quad V_{xx} = F'U_{xx} + F''U_x U_x = F'u_{xx} + F''u_x u_x, \quad V_{mm} = F'U_{mm} + F''U_m U_m = F'v_{mm} + F''v_m v_m$$

$$V_{xm} = F'U_{xm} + F''U_x U_m = F''u_x v_m, \quad V_{mx} = F'U_{mx} + F''U_m U_x = F''v_m u_x$$

因為 $F'' \geq 0$ 皆可，若原總效用函數 $U_{xx} = u_{xx} < 0$ (即商品的邊際效用遞減)，並且 $F'' > 0$ ，則新總效用函數可以 $V_{xx} \geq 0$ ，即新的總效用所對應的商品的邊際效用可以是遞減、常數、

或遞增。因此邊際效用遞減法則與序數效用概念彼此是天敵，彼此毫無共存共榮的機會。我們因此面對尖銳的兩難而必須進行的痛苦地取捨，不是必須放棄總效用的二次微分項數值的正負直接的與間接衍生的經濟意義，就必須放棄序數效用的核心概念。

另外，正向單調轉換前的總效用函數是屬於可分離相加的效用函數，亦即商品與貨幣彼此不會影響彼此的邊際效用 $U_{xm} = U_{mx} = 0$ ；但正向單調轉換後的總效用函數卻變成不是可分離相加的效用函數，因為商品與貨幣彼此會影響彼此的邊際效用 $V_{xm} = V_{mx} = u_x v_m > 0$ 。因此，在序數效用理論中，以邊際效用變化率的交叉項的正負數值不能維持固定，其經濟意義也必須割捨。

3.3 單調轉換的影響

單調正向轉換後的消費模型變成：

$$(9) \quad \max_{x,m} V(x,m) = F(U(x,m)) = F(u(x) + v(m)); \quad F' > 0, \quad \text{s.t.} \quad px + m = M$$

將預算限制式 $m = M - px$ ，代入效用函數中，模型變成：

$$(10) \quad \max_x V(x, M - px) = F(U(x, M - px)) = F(u(x) + v(M - px)); \quad F' > 0$$

令 $B \equiv V(x, M - px)$ ，最適化的一階條件為：

$$(11) \quad B_x = V_x - pV_m = 0 \quad \text{或} \quad \frac{V_x}{V_m} = p$$

內部解的二階條件要求 ($V_{xm} = V_{mx}$)：

$$(12) \quad B_{xx} = V_{xx} - 2pV_{xm} + p^2V_{mm} < 0$$

簡單的計算可得價格變動對購買數量的效果為：

$$(13) \quad x_p = \frac{V_m + x(V_{xm} - pV_{mm})}{B_{xx}}$$

3.4 單調正向轉換前後的分析結果

首先，由單調正向遞增轉換前的最適化一階條件是完全相同的，因為：

$$(14) \quad p = \frac{V_x}{V_m} = \frac{F'U_x}{F'U_m} = \frac{U_x}{U_m} = \frac{u_x}{v_m}$$

這表示，單調正向遞增轉換後的最適化條件不變，即最適解的數值不變。

其次，比較單調正向轉換前後兩個模型的比較靜態分析結果，我們應該可以證明正向單調轉換前後兩個模型的比較靜態分析的總效果或最後的結果會完全相同，即式(5)與式(13)必須相同。

這證明過程並不困難，我們的確可以證得它們必定相等的結果，即：

$$(15) \quad \frac{V_m + x(V_{xm} - pV_{mm})}{B_{xx}} = \frac{U_m + x(U_{xm} - pU_{mm})}{A_{xx}} = \frac{v_m}{u_{xx}}$$

其中， $B_{xx} = F'(U_{xx} - pU_{xm} - pU_{mx} + p^2U_{mm}) = F'A_{xx}$ 。

因此總效用函數經過單調正向轉換後，不會影響消費者的均衡條件，也不會影響比較靜態分析的整體的或最後的結果。這就驗證了無異曲線分析法的基本特性，也就是單調正向轉換前後的效用函數，表示相同的個人偏好。既然是代表相同的偏好，因此也應該隱含相同的個人行為。

這一切看起來很完美，序數效用理論看來似乎就足夠建構出合理的消費理論了。因為任何可以用來表示相同偏好關係的效用函數，也就是任何總效用函數經過任何單調正向轉換後，都不會影響消費者的均衡條件，也都不會影響比較靜態分析的整體的或最後的結果。因此，即使有些總效用函數所對應的邊際效用遞減、有些遞增以及有些不變，但這無關緊要，因為這些差異性看來似乎絲毫也不會影響分析結果，所以邊際效用遞減等概念是無意義的概念。這也難怪有些經濟學家主張邊際效用遞減法則其實是多餘的、膚淺的、無意義的、且不科學的概念。拋棄此概念不只毫不足惜，這種割捨掉不可觀察的主觀心理法則的做法，可被正面地標舉為一種讓經濟學邁向真正科學的進步徽章。

然而，有很多經濟學家不同意這種看法，他們認為邊際效用遞減法則是古典經濟學前輩的理論的精華與核心精神，邊際效用遞減法則是一種合情合理的心理現象。有些經濟學家為克服序數效用這些缺點，於是轉身研究基數效用理論的概念，而投身於不同的

效用概念的陣營。

3.5 基數效用的正向線性轉換

基數效用理論的基本精神是一個基數效用函數經過任何的正向線性轉換後的新效用函數有可以用來表示同樣的偏好關係。

以一般化的數學方程式，可將正向線性轉換的關係式表現為：

$$(16) \quad V(x, m) = \alpha U(x, m) + b = \alpha(u(x) + m) + \beta; \quad \alpha > 0, \beta \geq 0$$

對總效用進行正向線性轉換後，會衍生出以下的關係式：

$$(17) \quad V_x = F'U_x = \alpha u_x, \quad V_m = F'U_m = \alpha$$

$$(18) \quad V_{xx} = F''U_{xx} + F''U_x U_x = \alpha u_{xx}, \quad V_{mm} = F''U_{mm} + F''U_m U_m = F''U_{mm} = 0$$

$$V_{xm} = F''U_{xm} + F''U_x U_m = \alpha U_{xm} = 0, \quad V_{mx} = F''U_{mx} + F''U_m U_x = \alpha U_{mx} = 0$$

相對於正向單調轉換之下總效用的二次微分項不能維持固定不變的性質，現在我們得到 $sign V_{xx} = sign U_{xx} = sign(\alpha u_{xx})$ 、 $sign V_{mm} = sign U_{mm} = 0$ 的結果，即正向線性轉換前後不同的總效用函數所對應的 U_{xx} 與 V_{xx} 的數值正負符號相同，並且 U_{mm} 與 V_{mm} 的數值符號也相同。因此，在效用函數只能進行正向線性轉換之下可救回被序數效用理論所拋棄的常識性的邊際效用遞減法則。同理，我們可以獲得 $sign V_{xm} = sign U_{xm} = 0$ 、 $sign V_{mx} = sign U_{mx} = 0$ 的結果，即正向線性轉換前不同總效用函數可分離相加的特性不會發生改變。

但是，有所得常有所失。效用函數只能進行正向線性轉換的基數效用概念，也有其明顯的重大限制。正如 Allen (1935) 所正確指出地，正向線性轉換公式中的一個參數 α ，對應於長度測量概念中的「測量單位」(unit of measurement)，而另一個參數 β ，對應於長度測量概念中的「零標記」(zero mark)。因此正向線性轉換就是長度概念所具有的基本性質，基數效用是與長度的概念如公分與公尺一樣的可衡量概念，因此基數效用理論等於走回古典的效用可衡量的已被拋棄的不受歡迎的老路。另外，透過數學模型的分析，Samuelson (1938) 明確地發現為了得到(正向線性轉換)基數效用理論所再添加的假設太強烈，因此認為人們的偏好可以以這樣的效用函數來加以刻劃的條件在現實世界中可被滿足的機率是幾近於零，他以「無限地不可思議的」或「無限地不可能的」(infinitely improbable) 的強烈字眼來批評基數效用理論的概念。

序數效用理論與基數效用理論各有嚴重缺失，使得現代效用理論陷入兩難的困境之中。⁹就如 Bernardelli (1934)所說的「此時經濟學到達了十字路口 (At this point economics reaches cross roads.)」，或 Bernardelli (1952)所說的「但這…導致了一個非常尷尬的兩難困境。」 (But this ... leads to a very awkward dilemma.)。一是勉強地採取序數效用理論的觀點，此時效用具有只能排序大小的優點，而不會像長度一樣是可以衡量的缺點，但必須放棄一些被廣泛接受的邊際效用遞減等觀念以及建構在其上的相關古典理論，這是一種主張「截肢」的怪異理論；二是無奈地採取基數效用理論的觀點，此時可以保留被廣泛接受的邊際效用遞減等觀念與對應的相關古典理論，但必須接受效用像長度一樣是可以衡量的非常強烈的概念，而走向古典效用理論效用可衡量的老路。這兩條理論的道路都是有很大缺失的理論大道。

4. 故事背景

在前一節中，簡單地說明了，在已經累積了汗牛充棟的研究文獻並且至少已經發展了兩百多年的一門看似相當成熟的學科中，我們怎麼還有必要去重新探求更好的根基性效用理論的緣故。這個問題乍聽之下非常不可思議，所以我們必須在文章一開始的地方，以文獻回顧的方式以真實的歷史事實來回應「為什麼我們還需要一個新理論？」的典型提問。¹⁰

接下來，我們先不管舊理論的模型細節，如果你還沒讀過舊理論，那也沒關係，甚至，因為你還沒有受到舊理論的影響或汙染，這可能是更幸運的事。

我們先由一種假想的，但卻又時常經歷的類似的日常生活情境，來展開我們的分析。你走在回家的路上，看到街上一家商店內展示的一些商品很吸引你的注意力。你決定踏進店裡，近距離仔細端詳這些商品，發現其中有一項物品勾起你的購買與擁有的慾望，你看了一下價格標籤，並問了店員是否有折扣，估計了該商品可能的最後成交價。這時候，你內心開始揣摩思考要不要(或值不值得)以那樣的價格購買該商品，這時候你會怎麼想？若你決定要購買該商品，那麼你可能會進一步思考是否要多買幾單位，這時候你又會怎麼想？

⁹ 簡單回顧序數效用理論與基數效用理論的簡單發展史，可以促進與加深讀者對此問題的了解。有興趣的讀者，可以讀讀林忠正(2015) 介紹序數與基數效用理論發展史的論文與其他著作。

¹⁰ 有興趣的讀者，可以先讀讀林忠正(2015)標題為〈邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色：難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則〉的文章。

我先告訴你，我通常是怎樣做此購買決策的。看看你的決策方式是不是和我的很接近？

我會衡量以這個價格用來購買這項商品是不是值得的呢？換個角度說，我會衡量在這項商品上支出這些金錢是不是值得的呢？不論是對第一單位、第二單位...我通常都採取這種商品效益與價格成本的比較方式。有時候我會把一堆或整批(好多數量)商品當作一單位來思考，值不值得將這些錢花在這堆商品上？值不值得在這堆商品上花掉這麼多的錢？我會比較這單位商品與價格所各自對應的兩項不同的邊際價值對我的相對意義的大小。也就是，我會對該單位商品的「一得」與該單位價格的「一失」進行偏好排序。

就在這麼簡單、這麼少的、這麼符合實際的假設下，讓我為你說明如何建構一套假設切合實際人類行為特性的新的個體選擇行為的分析架構，以取代被廣泛採用但卻假設不切實際的當前主流的「無異曲線配合預算限制線的分析法」，但卻同時要能展現與保留個體選擇理論中的精華概念，如不可衡量的序數效用、負斜率的需求線與邊際效用遞減等概念。

在後續的文章中，我會繼續介紹與展示如何在新的個體新架構之下，呈現消費者剩餘等概念，以及如何重建一些建立在虛幻的同一條無異曲線上的「替代效果」、「所得效果」、補償變量、以及對等變量...等「無異曲線分析法」的虛幻概念。並且，我也會進一步解釋如何重新定義與重建在「無異曲線分析法」下無法合理解釋的互補品、替代品、劣等品、奢侈品、季芬財、炫耀性商品、季節性商品、公共財...等概念。

希望你會慢慢體會出，舊理論能做到的事，新理論都做得得到，但反之不成立。並且，新理論有舊理論的優點而無其缺點。了解愈深，愈會主張新理論可以取代舊理論。希望你會很有信心地認同，需求理論是需要再次依據新的分析架構加以重建，並且教科書也必須再次依新的分析架構加以重寫。

5. 新消費者理論的新假設與新符號

我們可以應用一些數學符號，來刻劃上述的日常交易活動的場景。當你走進商店時擁有所得 M 元，想要採買的商品的單位價格是 p 元，若你決定採購 x 單位，則在付出 px 元的代價後會剩下 $M - px$ 元。

採購數量 x 、單位價格 p 、原持有所得 M 、以及剩餘所得 $M - px$ ，這些變數可以用

來刻劃你從事日常消費活動時所經常面對的基本情境，這些變數的數值與你的決策可能息息相關。當然還有很多其他變數，也可用來描繪你所面對的其他外在的環境與內在的心理狀況，如天氣、節慶、流行、文化、店家布置、銷售員的態度、商品品質...以及自己的消費習慣、心情好壞、壓力大小、對人生感到樂觀或悲觀...等等。這些外在與內在變數也都可能會影響到你的消費決策，在後續文章的討論中你可以深刻的體會出，我們所提出的理論也可以輕鬆地將這些變數納入分析。但在本文中，我只聚焦於討論為何邊際效用遞減的概念在新的分析架構之下是一種序數效用的而不是現在公認的基數效用的概念。

我們假設，你每一次的選擇(每一單位要不要買)所面對的就是在進行一次的「一得」與「一失」之間的取捨，一次接續一次的內心權衡的心理思維程序就是一種邊際摸索的決策概念。「一得」就是你取得該單位商品對你的意義，「一失」就是你所必須付出的 p 元的價格對你的意義。

要在「一得」與「一失」之間進行取捨，其實，你只要知道「一得」與「一失」對你的相對重要性高低即可，而不需要知道兩者的相對重要性的差異有多大。也就是，你只要能判斷「一得」與「一失」的哪一邊你比較偏好(或比較喜歡)或一樣喜歡即可。

因此，我們的新效用理論的「第一個假設」、或「出發點」、或「基本主張」為：人有能力對一項交換或交易行為的「一得」與「一失」進行偏好排序。

我們用效用函數 $\phi_x(x, \dots)$ 來描述第 x 單位商品對消費者的意義，因為 $\phi_x(x, \dots)$ 是代表「第 x 單位商品」而不是「全部 x 單位商品」帶給消費者的效用，所以是一種「邊際效用」而不是「總效用」的概念。在效用函數 ϕ 上刻意地加上表示偏微分意義的下標 x 而變成邊際效用函數 $\phi_x(x, \dots)$ 的目的，就是為彰顯第 x 單位商品的「邊際效用」的「一得」意義。

比較麻煩或令人猶豫的是關於如何設定用來捕捉 p 元的價格對消費者的意義或效用的符號。 p 元的價格的效用，應該詮釋為「總效用」或「邊際效用」，顯得模稜兩可或各有道理，也各有缺點。若我們說「全部 p 元的價格帶給消費者效用是多少」，很容易傾向於解釋為「總效用」的概念，但是「全部 p 元的價格」應該只能被看成是「一個東西」，也就是「全部 p 元的價格」只是「一個單位」，它的「計算單位」就是「 p 元」，而不應該被想成是「計算單位」是「1 元」的「 p 個 1 元」的概念，所以若以純粹的「總效用」

數學符號如 $\psi(p; \dots)$ 來表示，就會顯得很不恰當。然而，在另一方面，若我們說「一個 p 元的價格帶給消費者效用是多少」，很容易傾向於解釋為「邊際效用」的概念，所以很自然會偏向於以純粹的「邊際效用」數學符號如 $\psi_p(p; \dots)$ 來描述，但這樣的符號的意義與典型的 $\phi_x(x; \dots)$ 的符號的意義，是非常不同的。因為 $\phi_x(x; \dots)$ 是表示最後的第 x 單位的那一單位的邊際效用，但是 $\psi_p(p; \dots)$ 卻不是表示最後的第 p 元的那一元的邊際效用；並且 $\phi_{xx}(x; \dots) > 0$ 是表示 x 商品的邊際效用遞增的意思，但 $\psi_{pp}(p; \dots) > 0$ 卻是指價格越高時，被視為一個單位的「 p 元的價格」的效用愈高的意思，及單價愈高所對應的「一失」愈大的意思，而不是價格的效用遞增的意思，所以若以純粹的「邊際效用」數學符號如 $\psi_p(p; \dots)$ 來表示，也會顯得不是完全恰當的，雖然它相當偏向邊際效用的概念，所以有時候在文章中會稱它的效用為邊際效用。面對這種令人猶豫與為難的新理論下的新概念，所以我決定創造一個新的表達符號。

我們因此採用效用函數 $\psi^p(p; \dots)$ 來描述 p 元的價格對消費者的意義，同樣的， $\psi^p(p; \dots)$ 代表「 p 元的價格」而不是「全部 px 元的支出」帶給消費者的效用，它有「邊際效用」也有「總效用」邊際效用的味道，但也不完全屬於其中一項。在效用(函數) ψ 上刻意地加上類似表示偏微分意義的上標 p 而非下標的目的，就是特別為「 p 元的價格」這種特殊的模稜兩可的身分或特性所特別量身訂做的新符號。

由前文中的說明，我們了解有四個基本變數(第 x 單位的商品、 p 元的價格、原先的所得 M 元、以及剩餘所得 $M - px$ ，假設你原先沒有擁有任何單位的 x 商品所以不會影響你對新增購買數量 x 的評價)，以及其他一些外在環境變數與內在心理變數，也可以用來刻劃你所面對的情境，所以這兩個邊際效用函數可以分別被較詳細表示成 $\phi_x(x; p, M, M - px, \dots)$ 且 $\psi^p(p; x, M, M - px, \dots)$ 。接著，為表達方便起見，我們先分別以 $\phi_x(x; \text{other things})$ 表示第 x 單位商品的邊際效用，以及以 $\psi^p(p; \text{other things})$ 表示第 p 元的價格的效用。當我們要分析特定的變數會對消費者的最適消費數量的可能影響時，則可以將這些特定變數清楚地外顯地寫出來。

值得讀者特別注意的，也是新模型與舊模型一項非常大的不同的地方。讀者會發現我們以非常不同基底 ϕ 與 ψ 的 ϕ_x 與 ψ^p ，而不是以具有相同的總效用 U 基底的 U_x 與 U^p ，來分別表示商品的邊際效用與價格的效用。這兩種不同的符號表示方式，吐露出相當不同的理論思路。一方面，若我們採取 U_x 與 U^p 的符號，這表示 U_x 與 U^p 背後有一個相同的總效用函數，即 U_x 與 U^p 來自於同一種的偏好排序概念，也就是來自於同一種的價值

觀。完整地說，是指在決策之前，將各種不同的慾求對象所對應的不同價值觀整合成同一種價值觀的意思。在另一方面，若我們採取 ϕ_x 與 ψ^p 的符號，這表示由 ϕ_x 與 ψ^p 有必要時可以推導出各自可衍生的不同的總效用函數， ϕ_x 與 ψ^p 是來自兩種的不同的偏好排序概念，也就是來自於兩種不同的價值觀。例如，人對消費的價值觀可能來自某些養成背景與生活經驗，而對金錢的價值觀可能來自另一些教養背景與生活經驗。當然，我們對宗教、傳統、捐贈、親情、愛情、生命、旅遊、學業、學歷、政治...的價值觀都可能來自不同的先天遺傳與後天環境的薰陶，所以以不同的函數形式的效用函數來表示不同的價值觀是相當合理的創新。這是新理論非常創新性或革命性的概念或想法。在適當的時機，在其他後續的相關的系列文章中，我會跟你解釋單一價值觀的理論基本上很難或無法解決現有的兩種效用理論的缺點，以至於無法建構出一項有兩種舊效用理論優點而無其缺點的兩全其美的新效用理論。

另外，我們以 ψ^p 表示「 p 元的價格」的價格效用，而不是以 $\psi^p = p\psi_m$ 來表示。其中， ψ_m 是每一塊錢的貨幣的邊際效用。這兩種表述方式，彰顯在新效用理論中將「 p 元的價格」視為一個整體(即「一失」)的角度來思量，而舊效用理論中是將「 p 元的價格」視為「 p 個一元」的角度進行思考。

因此，我們的新效用理論的「第一個假設」、或「出發點」、或「基本主張」可更詳細地表達為：人有能力對一項交換或交易行為的「一得」與「一失」進行跨越不同價值觀的偏好排序。

新效用理論因此是從第一個假設開始就不同於序數效用理論與基數效用理論。如前所述，序數效用理論的「第一個假設」是消費者有能力對各種不同的商品組合進行偏好排序；而基數效用理論的「出發點」是消費者不只有能力對不同的商品組合進行排序，同時，還有能力對不同的商品組合的移轉進行偏好排序。並且序數與基數總效用理論都是建立在同一個整合後的單一價值觀的效用排序概念，而跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法是建立在「得」與「失」是出自不同的價值觀的跨界排序的效用理論。

因此，無庸爭辯的，新的效用理論是一種新理論，從「第一個假設」開始，即從最根本(from the very beginning)的假設開始，是與兩種舊理論不同的嶄新理論。跨價值觀的偏好排序的效用理論是一種嶄新的思維、解釋與看世界的方式，是新舊理論一項根本性的差異。

新理論會產生一些新的概念，也會帶來一些新的符號。在進行進一步分析之前，有必要事先更詳細地介紹這些跨界邊際效用函數的意義。

首先，以下的商品邊際效用的符號的經濟意義分別是：

$\phi_x(x=1)$ 表示第 1 單位的 x 商品的邊際效用，

$\phi_x(x=2)$ 表示第 2 單位的 x 商品的邊際效用，

$\phi_x(x=3)$ 表示第 3 單位的 x 商品的邊際效用，

.....

$\phi_x(x)$ 表示第 x 單位的 x 商品的邊際效用。

其次，以下的價格效用的符號的經濟涵義分別是：

$\psi^p(p=1)$ 表示單位價格為 1 元時價格的效用，

$\psi^p(p=2)$ 表示單位價格為 2 元時價格的效用，

$\psi^p(p=3)$ 表示單位價格為 3 元時價格的效用，

.....

$\psi^p(p)$ 表示單位價格為 p 元時價格的效用。

接著，以下商品與價格效用的自身的微分項符號的經濟涵義分別是：

$\phi_{xx}(x) < 0$ 表示 x 商品的邊際效用遞減，

$\phi_{xx}(x) = 0$ 表示 x 商品的邊際效用不變，

$\phi_{xx}(x) > 0$ 表示 x 商品的邊際效用遞增，

.....

$\psi_p^p(p) > 0$ 表示商品的價格愈高單位價格的效用愈高(合理)，

$\psi_p^p(p)=0$ 表示商品的價格愈高單位價格的效用不變(不合理)，

$\psi_p^p(p)<0$ 表示商品的價格愈高單位價格的效用愈低(不合理)。

6. 消費者的問題

接著，我們說明只要 ϕ_x 與 ψ^p 的相對大小有意義(兩者邊際效用差值的正負有意義，而差值大小不需要有意義)，消費者就可以做出購買決策。也就是，只要有一種序數的邊際效用理論，我們就可以決定與分析消費者的均衡消費決策。

我們可以將偏好排序、邊際效用與決策三個層面的概念串聯成同一個決策程序，只要消費者對第 x 單位的商品與 p 元的價格之間的偏好與對應的(邊際)效用及決策關係，可由下列關係式加以表示：

$$(19) \quad x^{th} \succ p^{th} \Leftrightarrow \phi_x > \psi^p \Leftrightarrow \text{購買},$$

$$(20) \quad x^{th} \prec p^{th} \Leftrightarrow \phi_x < \psi^p \Leftrightarrow \text{不買},$$

$$(21) \quad x^{th} \sim p^{th} \Leftrightarrow \phi_x = \psi^p \Leftrightarrow \text{無差異(消費者均衡)},$$

或者，更完整的表達方式是：

$$(19a) \quad (x^{th}; other\ things) \succ (p^{th}; other\ things) \Leftrightarrow \phi_x > \psi^p \Leftrightarrow \text{購買},$$

$$(20a) \quad (x^{th}; other\ things) \prec (p^{th}; other\ things) \Leftrightarrow \phi_x < \psi^p \Leftrightarrow \text{不買},$$

$$(21a) \quad (x^{th}; other\ things) \sim (p^{th}; other\ things) \Leftrightarrow \phi_x = \psi^p \Leftrightarrow \text{無差異(消費者均衡)},$$

其中，當每一單位商品的售價是固定的時候，則其中所有的 p^{th} 都是相等的。並且，其中「*other things*」精確的表達方式是「*other things being equal*」的意思。

其經濟意義可以說明如下。當你要決定要不要利用 p 元的單位價格來購買第 x 單位那一單位的商品時，你等於是在對 p 元的價錢與第 x 單位那一單位商品進行偏好排序。

首先，若你對第 x 單位的那一單位商品偏好程度高於對應的那一個 p 元價錢的偏好程度，以效用來表示，就是你對第 x 單位商品的邊際效用 $\phi_x(x; other\ things)$ 高於 p 元價格的效用 $\psi^p(p; other\ things)$ ，則你會購買此單位商品。其次，若你對第 x 單位商品的偏好程度低於 p 元的偏好程度，以效用來表示，就是你對第 x 單位商品的邊際效用 $\phi_x(x; other\ things)$ 低於 p 元的價格效用 $\psi^p(p; other\ things)$ ，則你不會購買此單位的商品。再者，若你對第 x 單位商品的偏好程度無差異於 p 元的偏好程度，以效用來表示，就是你對第 x 單位商品的邊際效用 $\phi_x(x; other\ things)$ 等於 p 元的價格效用 $\psi^p(p; other\ things)$ ，則購買或不購買此單位的商品對你來說沒有差異。為分析方便，我們假設消費者會購買此對他而言是無差異的邊際單位商品。

舉幾個特例，說明商品的邊際效用與價格效用寫在一起時，對消費者的決策的意涵：

第一， $\phi_x(x=1) > \psi^p(p=5)$ 表示第 1 單位的 x 商品的邊際效用高於(該)單位價格為 5 元時價格的效用，也就是消費者對第 1 單位的 x 商品的偏好高於為取得此單位商品所必須付出單位價格為 5 元的偏好。也就是消費者會購買此單位的商品。

第二， $\phi_x(x=10) < \psi^p(p=5)$ 表示第 10 單位的 x 商品的邊際效用低於(該)單位價格為 5 元時價格的效用，也就是消費者對第 10 單位的 x 商品的偏好低於為取得此單位商品所必須付出單位價格為 5 元的偏好。也就是消費者不會購買此單位的商品。

第三， $\phi_x(x=5) = \psi^p(p=5)$ 表示第 5 單位的 x 商品的邊際效用等於(該)單位價格為 5 元時價格的效用，也就是消費者對第 5 單位的 x 商品的偏好無差異於為取得此單位商品所必須付出單位價格為 5 元的偏好。也就是消費者買不買此單位的商品對他來說沒有差異。

上述我們所刻劃的情境，在現今「消費者在預算限制下極大化總效用的基本分析架構」的對等的決策模型，就是以下大家極端熟悉的模型：

$$(22) \quad \max_{x,m} U(x,m) \quad s.t. \quad px + qm = M, \quad q = 1,$$

比較這兩種不同的決策方式，我們可以發現新舊模型有一些很明顯地不一樣的地方。第一，新舊分析架構帶給人的第一印象或外表的長相是非常不一樣的。舊理論的長相或外表是「消費者在預算限制下極大化總效用」的基本分析架構，而新理論則呈現兩

個邊際效用相互比較的外貌。第二，舊理論由偏好排序獲得總效用函數之後，還需要外加「消費者在預算限制下極大化總效用」的決策法則，而新理論的偏好排序與決策是一體的兩面，不需要再外加一種決策法則。

第三，舊理論是由總效用出發進行分析，而新理論是由邊際效用出發進行分析。第四，舊理論是由總效用出發進行分析，但在分析最適決策時必須用到邊際效用的概念，然而新理論是由邊際效用出發進行分析，但在分析最適決策不需要再用到總效用的概念。由這兩種理論來看，要分析消費者行為一定得用到邊際效用，即要分析消費決策邊際效用是一定得用到的概念，但不一定要用到總效用的概念，總效用對消費決策其實是可有可無的概念。

第五，舊理論必須再添加消費者會以微分的方式求取假想的一階與二階最適化條件來進行最適決策，這顯然是虛假的；而在新理論中偏好排序就是決策，不需要再添加一些額外的假設，我們不需要再假設消費者會微積分，也不需要再假設人會以思考或求取一階與二階條件的方法進行決策。在新理論中，消費者所需要做的事就只是偏好排序。第六，舊理論容許人們有能力一次進行非常多數量的慾求對象的最適決策，也就是有能力對由包含非常多商品的組合進行偏好排序，這是一種毫無決策成本概念的不切實際的虛假的決策模式；新理論的決策方式基本上就只需要進行「一得」與「一失」的偏好比較的排序任務，這是在很低的決策成本之下完成的任務，是一種切合實際的決策方式。

第七，新理論隱含人是以追求「得」與「失」所構成的「利得極大」或「損失極小」的「變化量或增量」的方式進行決策；而舊理論是以追求總效用極大的「總量」的方式進行決策。第八，舊理論總效用是隱含人們將所有面向的慾求對象彙整成單一的價值觀（單一的偏好排序）來進行思考，而構成單一的總效用函數，這背後隱含整合不同的面向的所有慾求為單一的價值標準好像是毫不需費力氣似的；而新理論的兩項邊際效用則是來自不同的價值觀（不同的偏好排序），這背後假設人們對不同的面向的所有慾求可能來自不同的價值觀的養成背景，通常或除非有必要進行比較時才會進行跨界的價值觀比較，否則就讓培育自不同價值體系的不同價值觀各自獨立的留在腦海中。

第九，由單一總效用出發的理論不能容許邊際效用交叉項不同的現象(如 $U_{xm} \neq U_{mx}$) 存在的空間；但由兩項不同價值觀的邊際效用出發，兩種不同的邊際效用交叉項不同(如

$\phi_{xp} \neq \psi_x^p$)是極其自然的附帶現象。第十,「無異曲線配合預算限制線的分析法」是一種最適分配理論的思維方式,即怎樣把一筆預算做出最佳的分配,為了達預算最適分配所必須進行的交易,只是這套思維方式的影子或副產品,其地位若隱若現。我所提出的新理論是一種最適交易理論的思維方式,即直接以值不值得進行一項交易的角度進行思考與決策,接受值得進行的交易,拒絕不值得的交易,以間接的方式達成最佳的預算分配。

第十一,交易理論的「一得」與「一失」的決策方式,意味著個人是以序列決策的方式來進行一次接續一次的消費或其他人生決策,這是一種有限理性的決策方式;但分配理論的決策方式容易導向以一次全面性的決策的方式來進行相關分析,是一種超級理性的決策方式。

當然,新舊理論不只是形塑模型外表長相的遺傳基因非常不同,新舊理論會導致模型的解釋能力與預測能力的基因也有很根本性的差異,例如,我們很快會看到,刻劃消費者最佳選擇的消費者均衡條件,在新理論中將不再是「邊際替代率等於相對價格」的舊理論中的恆久不變的均衡條件。消費者的均衡條件不同,意味這對消費者行為的詮釋與預測將有很大的差異。

你因此可以想像,如果新理論能取代舊理論,那表示經濟學的個體選擇模型的外貌,將會大變,這項外貌的巨大變化,不只是同一個人因經歷一次大整型,而改變外觀;而是根本上是長得完全不一樣的兩個人,這種完全不同的外貌是來自另一種全新變異的遺傳基因的新物種,而不只是因為舊理論由總效用出發而新理論由邊際效用出發開始進行決策的差異所造成的不同而已。

你可以因此了解到推廣這套新理論等於否定了或改變現今大部分經濟學家的看世界的方式,我們也可以想像要推廣這樣的新理論所會遭遇的阻力會有多巨大,因此新理論的各方論述,不論在現實性、合理性、邏輯性、哲學性...等,都必須非常完備合理,才有機會被普遍接受。這不禁令我想起 Loren Eiseley (1958)在《達爾文世紀》(*Darwin's Century*)書中,所說的一句話:「偉大的綜合者能改變人類一整個世代的觀念,提供世界一個全新的景觀,但也最容易遭受同時代人的忌妒、怨恨與害怕。」

7. 消費者均衡

我們假設消費者決策的思維方式如下。當消費者在考慮是否購買某特定的商品數量時，若 $\phi_x(x; \text{other things}) > \psi^p(p; \text{other things})$ 則會購買此單位並且會繼續考慮增加購買下一單位；若 $\phi_x(x; \text{other things}) < \psi^p(p; \text{other things})$ 則不會購買此單位，並且會減少購買數量。換句話說，消費者會一直購買到對第 p 元的偏好程度剛好等於第 x 單位商品的偏好程度，以效用來表示，就是消費者對第 p 元的邊際效用 $\psi^p(p; \text{other things})$ 剛好等於第 x 單位的商品的邊際效用 $\phi_x(x; \text{other things})$ 的地步。因此，一位財富水準為 M 的消費者的最適購買數量(x)決定於：

$$(23) \quad \phi_x(x; \text{other things}) = \psi^p(p; \text{other things}),$$

等號左邊第 x 單位商品的邊際效用 $\phi_x(x; \text{other things})$ 是表示一項交換或交易行為的「得」，在此是指「購買或消費第 x 單位商品所獲得的消費邊際效用」；等號右邊價格的效用 $\psi^p(p; \text{other things})$ 是表示一項交換或交易行為的「失」，在此是指「購買第 x 單位商品付出的單位價格 p 元所犧牲的價值」，也就是為購買第 x 單位那一單位商品付出邊際成本的意思。因此，這是一種非典型的跨界的邊際效用等於邊際成本的最適化概念。這一條最適化條件是「跨價值觀的交換理論的基本方程式」(the fundamental equation of the inter-value-judgment exchange theory)或「跨價值觀的序數邊際效用分析法的基本方程式」(the fundamental equation of the inter-value-judgment ordinal marginal utility approach)。

「跨價值觀的交換理論(得與失的序數的邊際效用分析法)的基本方程式」與 Stigler (1950) 所謂的傳統的「邊際分析的基本方程式」，是相當不同的概念。

傳統的「邊際分析的基本方程式」可表示如下：

$$(24) \quad U_x = pU_m \quad \text{或} \quad \frac{U_x}{p} = U_m$$

這其實就是 Hicks (1956) 在《需求理論的修正》(A Revision of Demand Theory) 的大作中，所謂的「消費者的均衡決定於著名的比例法則—亦即消費者把一定數量的貨幣用到所有商品價格一定的市場上面，在每一種商品的邊際效用都與其價格成比例之點到達均

衡」的類似意思。

這一條基本方程式，是自 Gossen (1854) 以來，效用最大化效用模型的「邊際效用分析法的基本方程式」，這條基本方程式是自 Gossen (1854) 以來，在超過一百六十年的歷史中，一直是刻劃個體選擇行為的最基本的均衡式。但「交換理論(序數的邊際效用分析法)的基本方程式」改變這條最基本的均衡式。

7.1 比較新舊兩項理論的消費者均衡式

第一，舊理論的偏好排序的概念，是直接對不同商品組合進行排序，價格與所得與偏好的排序無關，也就是 Herbert Simon 諷刺的所謂「隨身攜帶著一個效用函數到處逛」的意思；在新理論中，人們是對交易或交換機會的「得」與「失」進行偏好排序，「得」與「失」是透過交易條件(相對價格)建立相互之間的關係，並由所得的高低規範可能的交易範圍，所以價格與所得與偏好的排序息息相關。第二，在價格與所得與偏好的排序無關的舊理論中，在消費者的均衡條件中相對價格是現身於邊際效用函數之外；而在價格與所得與偏好的排序息息相關的新理論中，在消費者的均衡條件中相對價格是現身於邊際效用函數之中。這是因為，在舊理論中消費者在真正進行消費決策時，才會將主觀的偏好排序結果與客觀的市場條件與個人購買能力合併在一起加以進行權衡與取捨，而新理論是在個人面對交易條件與考量個人交易能力的情況下，才進行符合客觀條件下的偏好排序工作，即在做偏好排序時已考慮市場價格與個人所得等條件了(也就是瞭解與考量進交易的機會與能力後才進行偏好排序)。第三，由結果來看，當 $\psi^p(p; \text{other things}) = \psi_m(p; \text{other things})p$ ，其中 $\psi_m(p; \text{other things})$ 為價格 p 元的平均每一塊錢的邊際效用(可以是常數)的特殊情況下，均衡條件變成：

$$(25) \quad \phi_x(x; \text{other things}) \approx \psi_m(p; \text{other things})p, \text{ 或 } \frac{\phi_x(x; \text{other things})}{\psi_m(p; \text{other things})} = p$$

在此特殊條件下，兩項消費者均衡條件比較接近，都可以寫成邊際效用與相對價格之比相等的表達方式，但事實上，這兩個的基本方程式本質上還是不一樣。因為，在傳統的「邊際分析法的基本方程式」中，兩項邊際效用是來自於整合成同一價值觀的同一個總效用函數，而在新的理論中兩項邊際效用函數分別來自兩種不同的價值觀。消費者直接由邊際單位與對應的不同的邊際效用進行思考，除非有必要否則消費者沒有必要思索與推導出兩個不同的邊際效用所會衍生出的兩項不同的總效用函數。

新理論個體選擇的新均衡條件告訴我們，在分析各式各樣的個體選擇問題時，不需要再無選擇的強迫的將問題塞入「預算限制下極大化總效用的分析模型」、以及「邊際替代率等於相對價格的均衡條件」之中，看看會擠出怎樣的分析結果。

7.2 邊際效用比值的角度

換個角度，在新理論中，個體選擇的均衡條件 $\phi_x(x; \text{other things}) = \psi^p(p; \text{other things})$ 隱含：

$$(26) \quad \frac{\phi_x(x; \text{other things})}{\psi^p(p; \text{other things})} = 1$$

這表示在消費者均衡時，商品的邊際效用與價格效用的比值恰好等於 1。值得特別關注的，這一條「跨價值觀的交易理論(序數的邊際效用分析法)的基本方程式」與分配理論的極大化總效用分析法的「基本方程式」 $U_x(x)/U_m = p$ 相當不一樣。在一些特殊的假設下，新的「交易理論序數的邊際效用分析法的基本方程式」才會退化成接近或類似於舊的「分配理論極大化總效用分析法的基本方程式」。

舊理論的消費者均衡條件，可以輕鬆地改寫為，知名的邊際替代率等於相對價格的「邊際效用分析法的基本方程式」，即

$$(27) \quad MRS_{xm} = \frac{MU_x}{MU_m} = \frac{p}{1} = p$$

這一條基本方程式，是至少自 Hicks and Allen (1934) 以來，效用最大化效用模型的「邊際效用分析法的基本方程式」，這條基本方程式一直是刻劃個體選擇行為的最基本的均衡式。但「交換理論(序數的邊際效用分析法)的基本方程式」的消費者均衡條件不再重複陷入這條序數效用革命之後描繪最基本的消費者均衡的方程式。

傳統的「邊際分析的基本方程式」的結果必須在兩個更一般化的假設之下，才會接近「跨價值觀的交換理論(序數的邊際效用分析法)的基本方程式」。第一是舊理論中的 pU_m 改寫成或轉換為更具一般性的 U^p 的設定，第二是舊理論的商品邊際效用與價格效用必須是來自不同定義域的偏好排序關係或是來自於不同的價值觀的偏好排序。

換個角度看，或許，有人會認為，只要將舊理論中， pU_m 改寫成或轉換為更具一

般性的 U^p 的設定，新舊兩種理論就完全一致了。也就是舊理論的基本方程式變成

$$(28) \quad MRS_{xp} = \frac{U_x}{U^p} = 1$$

其實，這項看法還沒有真正捕捉到新理論的跨越多重價值觀的精神，因為在新理論中的兩項邊際效用的概念來自兩種不同的價值觀(背後沒有必要先建構出兩個個別的總效用函數)，而舊理論的兩個邊際效用函數是來自同一價值觀的總效用函數。

在序數與基數效用的舊理論中， pU_m 的表示方式，其實，沒有真正捕捉到 p 元價格的效用的意義。當 $pU_m = U^p$ 時， U_m 應該是表示 p 元價格的 averages 的每一塊錢的效用的意思，而不是 p 元價格的最後一塊錢的邊際效用的意思。也就是，在無異曲線分析法中，對交易的「一得」與「一失」的描寫方式是不夠精確的。

邊際替代率也就是無異曲線斜率，邊際替代率等於相對價格的消費者均衡條件是「消費者在預算限制下極大化總效用的基本分析架構」的標誌或體現或同義詞。

此時，我們發現這項最頑強的消費者最適化條件「邊際效用之比與相對價格之比相等」或「邊際替代率與相對價格之比相等」或「每一種商品的邊際效用與自身價格之比相等」的傳統的邊際分析法的基本方程式不再成立。這是非常令人驚訝與非常創新的發現。

新的跨界的序數邊際效用分析法與舊的序數與基數效用理論在出發點的第一個假設就不一樣，而所獲得的描述消費者最佳行為的均衡條件也不一樣，這更凸顯新理論的確是一種不同於舊理論的新分析架構。

在新的跨界的邊際效用理論下的消費者均衡條件，不再重複複製非常頑強的傳統邊際效用分析的「邊際替代率與相對價格之比相等」的均衡條件，也就不會再落入邊際效用等於相對價格的窠臼之中。也就是，無異曲線與預算限制線相切的消費者最適化條件已不復在新理論中現身，這表示新理論為經濟學個體選擇理論跨出了非常不一樣的一小步，這一小步可能會是改變經濟學個體選擇理論的相關解釋與預測內涵與能力的一大步。

例如，這項結果會對福利經濟學會造成什麼影響？是很值得關切與探討的問題。

簡單地說，對不同的消費者而言，在舊的基數與序數效用理論之中，

$$(29) \quad MRS_{xm}^i = \frac{U_x^i}{U_m^i} = \frac{p}{1} = \frac{U_x^j}{U_m^j} = MRS_{xm}^j$$

其中上標 i 和 j 表示不同的個人。即藉由一個相同的相對價格將不同的消費者的邊際效用之比(邊際替代率)串聯在一起，使得在相同的價格之下，所謂的市場競爭均衡之下，每一位消費者的邊際替代率都會相等。若不同消費者面對不同的相對價格，則每一位消費者的邊際替代率會不相等。

在新的序數的邊際效用理論之下，由於，並不需要在相同的相對價格將不同的消費者的跨界的邊際效用之比串聯在一起的條件，而是透過等於 1 的條件將跨界的邊際效用之比串聯在一起，所以即使消費者面對的相對價格不同。所以，不再需要消費者面對相同價格的完全競爭模型之下，消費者的商品邊際效用與價格的效用的比值也相等，這是因為

$$(30) \quad \frac{\phi_x^i(x)}{\psi^{p,i}(p)} = 1 = \frac{\phi_x^j(x)}{\psi^{p,j}(p)}, \text{ 即使價格不同還是 Pareto optimum}$$

從而，新理論會對福利經濟學造成什麼影響？是很值得關切與探討的問題。另外，在新理論之下，物物交換的純粹交易模型如何重新建構，與契約線如何呈現都是很有趣的問題。

8. 分析最基本的消費者選擇模型

在此，為了在一開始介紹這套新理論的分析技巧與所衍生的經濟涵義時，能由簡入繁、由易入難，在本文中我們先對標準模型再進行一些簡化設定。假設商品邊際效用函數與價格效用函數都不會受到本身(第 x 單位那一單位商品以及 p 元價格那一單位的價錢)之外的所有其他變數的影響，這當然是最基本最簡單的模型，此時兩者變成：

$$(31) \quad \phi_x(x; \text{others}) \Rightarrow \phi_x(x); \phi_{xx} < 0, \phi_{xi} = 0 \text{ for all } i \neq x \text{ variables}$$

$$(32) \quad \psi^p(p; \text{others}) \Rightarrow \psi^p(p); \psi_p^p > 0, \psi_i^p = 0 \text{ for all } i \neq p \text{ variables}$$

8.1 最基本的消費者選擇模型的消費者均衡

假設當你在思考是否購買某特定單位的商品時，若 $\phi_x(x) > \psi^p(p)$ 則會購買此單位並且會繼續考慮增加購買下一單位；若 $\phi_x(x) < \psi^p(p)$ 則不會購買此單位，並且會減少購買數量。因此，消費者有內部均衡解的條件是：

$$(33) \quad \phi_x(x) = \psi^p(p)$$

這最適化條件是「跨價值觀的交易理論(序數的邊際效用分析法)的基本方程式」的簡單版本。

換個角度， $\phi_x(x) = \psi^p(p)$ 隱含：

$$(34) \quad \frac{\phi_x(x)}{\psi^p(p)} = 1$$

這表示在消費者均衡時，商品的邊際效用與價格的效用的比值恰好等於 1。這一條「交易理論(序數的邊際效用分析法)的基本方程式」比分配理論的極大化總效用分析法的「基本方程式」 $\phi_x(x)/\psi_m = p$ 更具有一般性，其中 $\psi^p = p\psi_m$ ，且 ψ_m 表示平均的每一塊錢的邊際效用。另外，這是最基本的均衡式，可因為環境的變化與變換，而有無限延伸的可應用。例如，怎樣分析替代品與互補品，怎樣以邊際效用曲線與等邊際效用曲線畫出替代品、互補品與獨立品的圖形。又該如何定義完全替代與完全互補、以及如何畫出其圖形。

另外，內部解的安定條件可以說明如下。首先，消費者的決策方式可以以以下的方程式來加以形容：

$$(35) \quad \dot{x} = f(\phi_x(x) - \psi^p(p)); f' > 0$$

此方程式表示第 x 單位商品的邊際效用高於對應的價格的效用時，購買數量會增加。接著，內部解的安定條件要求：

$$(36) \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = (\phi_{xx}(x) - \psi_x^p(p))f' < 0 \Leftrightarrow \phi_{xx}(x) < \psi_x^p(p)$$

這條方程式表示隨著 x 商品的購買數量增加，商品邊際效用高於對應的價格的效用的幅度會隨之不斷縮小，這時候可以找到一個使商品的邊際效用等於價格的邊際效用的內部均衡解。此方程式等價於

$$(37) \quad \phi_{xx}(x) < \psi_x^p(p)$$

這表示在橫軸表示商品 x 的數量且縱軸衡量商品的邊際效用與價格的效用的平面圖形中，價格效用 $\psi^p(p)$ 曲線的斜率大於商品邊際效用 $\phi_x(x)$ 曲線的斜率。此圖形在後文中會加以繪製。

在現在的模型中，因為我們假設 $\phi_{xx}(x) < 0$ 且 $\psi_x^p(p) = 0$ ，所以內部解的安定性條件 $\phi_{xx}(x) < \psi_x^p(p)$ 會成立。

值得注意的是，在舊的預算限制下追求總效用極大的模型裡，是由消費者的最適決策的二階條件扮演構成有內部解的條件，這是由消費者對總效用函數進行受限制的極大化的微分而得的條件。在新序數的邊際效用分析法中，消費者不再被要求會作微分的一階與二階條件最適化的數學運算。舊理論的一階條件被新理論的邊際摸索條件所取代，舊理論要求內部解的二階條件為新理論的安定條件所取代。舊理論的二階條件反映無異曲線斜率變化率的偏好關係，新理論的安定條件反映消費者的決策方式與思維過程。內部解的條件取決於消費者購買商品時的思維與決策方式，似乎是比较取決於偏好關係的無異曲線斜率的變化率來得自然且有意義。無論如何，由兩種新舊效用理論的操作所需要的內部解的條件，是來自非常不同的面向的觀點來看，我們可以非常深刻地體會到新理論的確是一種嶄新的理論，一種嶄新的新出發點所帶來的一種相當全面性的嶄新的新思維。

8.2 比較靜態分析

對式(33)的消費者均衡式，做商品數量 x 、價格 p 與所得 M 的全微分，可得需求函數為所得的正函數但是價格的負函數，即：

$$(38) \quad x^d = x^d(p, M)$$

其中，

$$(39) \quad x_M = 0$$

$$(40) \quad x_p = \frac{\psi_p^p}{\phi_{xx}} < 0; \quad \psi_p^p > 0, \quad \phi_{xx} < 0$$

式(39)中所得(M)變動對需求量(x)的結果 $x_M = 0$ 表示，所得高低不會影響購買數量的多寡，主要原因是因為消費者所保有的現金或財富多少不會影響商品與價格的效用。在後續的文章中，我們會在更一般化的模型中分析所得變動對購買數量的影響。

式(40)中價格(p)變動對需求量(x)的影響 $x_p < 0$ 說明，商品價格愈高，你購買此商品的數量愈少。簡單的說，價格愈高需求量愈少，這就是需求法則，也就是負斜率的需求線的意思。這主要是因為商品的邊際效用遞減所導致的結果，由於商品價格提高，很自然地會提高價格的效用，即提高消費的邊際成本，此時為恢復跨界的邊際效用相等的消費者最適化條件，商品的邊際效用也必須對應的提高，但因為商品的邊際效用遞減，所以消費者購買此商品的數量將會減少。

值得注意的是，當 $\psi^p = p\psi_m$ 且 ψ_m 表示平均的每一塊錢的邊際效用時，我們可得 $\psi_p^p = \psi_m$ 。 $x_p = \psi_p^p / \phi_{xx}$ 變成或退化成 $x_p = \psi_m / \phi_{xx} < 0$ ， $x_p = \psi_m / \phi_{xx} < 0$ 與效用極大化的 Marshall 的分析結果 $x_p = v_m / u_{xx} < 0$ 是完全相應的分析結果。

簡單的說，負斜率的需求曲線是得自於商品的邊際效用遞減。這是 Marshall 需求理論的基本精神(在序數的邊際效用分析架構中)的重現。但是，「取決於商品的邊際效用遞減的負斜率需求曲線」的效用可衡量的 Marshall 需求理論，是現在被掃進歷史塵埃中而被棄置的不合宜理論，例如，在 Varian (1996) 的 *Intermediate Microeconomics*—書中，你可以找到「邊際替代率遞減」(diminishing marginal rate of substitution)的字眼，以及「技術替代率遞減」(diminishing technical rate of substitution)的用語，但在 650 頁的 Varian (1996) 書中，你找不到「邊際效用遞減」的字眼。又如 Jehle and Reny (2011) 的《高等個體經濟理論》(*Advanced Microeconomic Theory*)中，雖然你可以找到一次「邊際效用遞減原理」的用語，但卻是伴隨著非常負面的評價。Jehle and Reny 說「『邊際效用遞減原理』

被接受作為一種心理『法則』，需求法則早期的論述是依賴於此法則。這些都是關於人類心智的內部運作的非常地或可怕地強烈的假設(awfully strong assumption)。」

這背後一項主要原因是邊際效用遞減的概念是古典的效用衡量或現代的基數效用的同義詞。可衡量的基數效用概念是很多主張效用數值只有相對大小有意義的序數效用主義者，避之惟恐不及的效用理論，為什麼我們還要在這項新理論中重現這項分析結果呢？我們可以賦予它新的兩全其美的意義嗎？

答案是：是的。邊際效用遞減原則在新理論中有非常不一樣的意義。現在，在新理論中，邊際效用遞減不再是基數效用的同義詞，反而是序數效用的概念。

由商品的邊際效用遞減可以獲得負斜率的需求曲線，但此理論是得自於序數效用，而非基數效用的概念，這是相當革命性的突破。我們建構了一項新的效用理論與對應的新的需求理論，在此新理論下，效用是序數的而且邊際效用遞減的概念是可以與序數效用的概念並存的，這是一項兩全其美的新理論。我們可以真正再次重新建構消費者選擇理論或價值理論了。

這是為什麼呢？證據在哪裡？

證明方法很簡單，只要我們對新理論進行序數效用理論的標準特性，單調轉換後，在此新模型中消費者的均衡條件與邊際效用遞減的概念、以及比較靜態結果等所有特性，都不會因單調轉換而改變，就可得證。

8.3 正向單調轉換

序數總效用分析法強調單調正向轉換不會改變偏好(與行為)的特性，但因單調轉換前後的總效用函數所對應的總效用的二次微分項的正負符號會產生變化，所以必須犧牲效用函數二次微分項的經濟意義。也就是，為了追求序數效用的正確理念，必須將效用可衡量的骯髒的洗澡水與邊際效用遞減的嬰兒一起倒掉。

序數的邊際分析方法假設人由邊際效用出發(而非由總效用出發)直接來思考問題，此時邊際效用函數經過單調轉換後邊際效用遞減或遞增的符號會維持不變，所以邊際效用遞減概念是序數的概念，也就是我們不需要再為了要維持效用是序數的概念而犧牲邊際效用遞減的概念。在新的跨界的序數邊際效用分析法之下，效用函數的單調轉換操作

不會改變背後的偏好次序，不會改變對應的最佳消費者行為，也不會改變邊際效用變化率(如邊際效用遞減)的經濟意義。

因此，為了追求序數效用的正確理念，我們不需要再將效用可衡量的骯髒的洗澡水與邊際效用遞減的嬰兒一起倒掉，我們可以留下邊際效用遞減的嬰兒，而只需要倒掉效用可衡量的骯髒的洗澡水。因此新效用理論有兩種舊的序數與基數效用理論的優點而無其缺點，明顯是更好的效用理論。

單調轉換的相關證明，簡單介紹如下。

對商品邊際效用 $\phi_x(x)$ 透過單調函數 $F(\cdot); F' > 0$ 轉換為 $\Phi_x = F(\phi_x(x))$ ；同時對 p 元的價格效用 $\psi^p(p)$ 做同樣的單調轉換為 $\Psi^p = F(\psi^p(p))$ 。即

$$(41) \quad \Phi_x(x) = F(\phi_x(x)); \quad F' > 0, \quad F'' \geq 0$$

$$(42) \quad \Psi^p(p) = F(\psi^p(p)); \quad F' > 0, \quad F'' \geq 0$$

這隱含：

$$(43) \quad \Phi_{xx}(x) = F' \phi_{xx}(x)$$

$$(44) \quad \Psi_p^p(p) = F' \psi_p^p(p)$$

因為正向單調轉換 $F(\cdot); F' > 0$ 的基本特性，所以 $sign \phi_{xx}(x) = sign \Phi_{xx}(x)$ 與 $sign \psi_p^p(p) = sign \Psi_p^p(p)$ 所以邊際效用的變化率的正負有經濟意義。在單調轉換前商品的邊際效用遞減 $\phi_{xx}(x) < 0$ ，則在單調轉換之後商品的邊際效用一定還是遞減 $\Phi_{xx}(x) < 0$ 。因此，非常重要的，邊際效用遞減在此新分析架構中是序數效用概念，而非如在極大化總效用理論中是基數效用的代名詞或同義詞。邊際效用遞減是基數效用的同義詞是現代公認的效用理論的基本特性，兩者一直是以同進同出一體的两面的身分出現在現代效用理論中。

轉換後的消費者均衡要求：

$$(45) \quad F(\phi_x(x)) = F(\psi^p(p))$$

首先，原均衡條件為 $\phi_x(x) = \psi^p(p)$ ，透過相同函數的單調轉換，將兩個相等的數值轉換成兩個新的數值，這兩個新的數值也一定會相等，所以轉換後新的均衡條件 $F(\phi_x) = F(\psi^p)$ 也一定還會成立。故單調正向轉換前後的最適條件與最適解都不會改變。

其次，簡單的計算可得，價格變動對購買數量的效果為：

$$(46) \quad x_p = \frac{\Psi_p^p}{\Phi_{xx}} = \frac{F' \psi_p^p}{F' \phi_{xx}} = \frac{\psi_p^p}{\phi_{xx}} < 0, \quad \psi_p^p > 0, \quad \phi_{xx} < 0$$

此比較靜態分析結果與單調轉換前的結果式(40)相同。因此對邊際效用函數進行單調正向轉換不影響比較靜態的結果。

從而對任何一個相同問題而言，序數總效用分析法都存在總效用二次微分項(邊際效用的變化率)沒有意義的缺點，而序數邊際效用分析法對此缺點免疫。要注意我們的結論是非常具有一般性的，此結論隱含對任何一個相關問題而言，新模型都是比較好的模型。

另外，單調轉換後消費者的邊際摸索的思維方式變成：

$$(47) \quad \dot{x} = g(\Phi_x(x) - \Psi^p(p)) = g(F(\phi_x(x)) - F(\psi^p(p))); \quad g' > 0$$

內部解的安定條件要求：

$$(48) \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = (\Phi_{xx}(x) - \Psi_x^p(p))g' = (F' \phi_{xx}(x) - F' \psi_x^p(p))g' < 0 \Leftrightarrow \phi_{xx}(x) < \psi_x^p(p)$$

此方程式等價於

$$(49) \quad \Phi_{xx}(x) < \Psi_x^p(p) \Leftrightarrow F' \phi_{xx}(x) < F' \psi_x^p(p) \Leftrightarrow \phi_{xx}(x) < \psi_x^p(p)$$

所以單調轉換前後內部解的安定條件不變。

8.4 跨界的序數邊際效用理論的一些特性

在跨界的序數邊際效用理論之下，會衍生的一些值得注意的特性。我們應用在上文

回顧效用理論的歷史中，所提到的一些人物的評論與爭議的論述，以回應他們的論述的方式來介紹與陳述新理論的一些特性：

第一，新理論的邊際效用是序數的，是一種序數的邊際效用理論。第二，對邊際效用函數進行單調轉換後，所獲得的純粹的與交叉的邊際效用的變化率正負符號不會改變。第三，所以邊際效用遞減不再是基數效用的同義詞，邊際效用遞減是一種序數的邊際效用的概念。第四，由商品的邊際效用遞減可以推出負斜率的需求曲線，但此時效用(邊際效用)是可以進行單調轉換的序數效用概念，而不是效用只能進行線性轉換的基數效用的概念，因此由商品的邊際效用遞減配合固定的價格的效用條件，而獲得的負斜率需求曲線的結果，不再是一般認知的效用可衡量的概念。第五，Marshall 的邊際效用分析法不見得必須被詮釋成效用可衡量的概念。

第六，Bernardelli 所謂的「至今已被證明是最令人費解的謎團之一」的經濟學的謎團，還是沒有人能成功地解開，現在已經被解開了。序數的邊際效用理論是一種兩全其美的效用理論，可以解決 Bernardelli 所謂的「最大的謎團之一」。第七，新理論實現了 Bernardelli 教授復興古典邊際效用理論的願望。現在我們可以在序數效用的概念下，救回邊際效用遞減的概念。效用是序數的概念是對的，邊際效用遞減等概念也是對的，現在這兩項正確的概念已經可以並存了。

第八，因此，我們不需要如 Rothbard (1956)所批評的「在 20 世紀 30 年代初由 Hicks 和 Allen 所領導的序數效用主義者的叛軍，覺得有必要推翻邊際效用本身以及可測量性的概念。他們，如此的作為，等於是將效用的嬰兒與基數的洗澡水一起倒掉。」現在，不像 Hicks 和 Allen 所領導的序數效用主義者的叛軍，為了追求序數效用的正確理念，我們不需要再將效用可衡量的骯髒的洗澡水與邊際效用遞減的嬰兒一起倒掉，我們可以留下邊際效用遞減的嬰兒，而只需要倒掉效用可衡量的骯髒的洗澡水。

第九，關於 Samuelson 與 Bernardelli 教授的教科書是否必須重新改寫的爭論。答案，還是：肯定的。教科書現在還是得重新改寫，只是教科書不是改寫成 Samuelson 所支持的 Slutsky-Hicks 的序數效用或無異曲線分析法，而是應該改寫成新的跨界的序數邊際效用分析法。第十，關於 Lancaster 「這件事不論 Bernardelli 博士或其他任何人都是無能為力的」的猜測，已不再成立。這件事事實上是存在著合理的理想的解決方案的。第十一，Bernardelli 對於經濟學家一直將經濟問題強迫性地硬塞入邊際替代率的框框中做法的感

概，這個邊際替代率等於相對價格的框框在新理論中已不再成立，我們已經可以找到更具一般性的合理的替代性的消費者分析框架或均衡條件。

相對於序數總效用理論，序數邊際效用理論有序數總效用理論效用是序數的優點，但沒有它與邊際效用遞減原則是天生不能並存的缺點。相對於基數總效用理論，序數邊際效用理論有基數總效用理論效用能包容邊際效用遞減的優點，但沒有它效用是可衡量的缺點。總結，所以，序數邊際效用理論有序數與基數總效用兩種主要效用理論的優點而無其缺點，是一種兩全其美的新效用理論。¹¹

在本文正文一開始的段落中，我引用 Jean-Sébastien Lenfant (2006)發表於《政治經濟史》(*History of Political Economy*)的〈互補性和需求理論：從 20 世紀 20 年代至 40 年代〉(Complementarity and demand theory: From the 1920s to the 1940s)的經濟史論文的破題：「消費需求理論的歷史通常被看作是從簡單的馬歇爾設計轉變至功能強大的希克斯形式的需求理論的表述方式。曾經，有人這樣說，馬歇爾形式的『需求法則』遇到序數主義的原則，通過序數原則逐步將馬歇爾形式的『需求法則』改造成具有現代科學所有屬性的一個美麗的需求理論。」

本文分析的結果，暗示或明示地告訴我們，因為我們已經找到一種有兩種舊效用理論優點而無其缺點的新效用理論，所以需求理論必須再次重建，或許以後有一天有經濟史學家會改寫上述的段落為：「消費需求理論後來的歷史發展，通常被看作是從不切實際的希克斯形式的需求理論的表述方式重新回復到獲得合理的跨價值觀的偏好排序概念的靈藥而重生的簡單的合乎直覺的馬歇爾設計。曾經，有人這樣說，馬歇爾形式的『需求法則』因為遇到跨界的序數邊際效用主義的原則而重生，通過跨界的序數邊際效用主義的原則逐步將馬歇爾形式的『需求法則』改造成具有現代科學所有屬性的一個美麗的需求理論。」

¹¹ 唯一一項令人不舒服的感覺是：“too easy to be true or too good to be true”。其實，Hicks and Allen (1934)的分析也不困難，相對困難的是在由偏好公設推導效用函數的證明。我們的分析看起來很簡單，但事實上，回去看看這整個概念的建構與公設的證明是一點也不簡單。關於公設證明的「得」與「失」的部分，有興趣的讀者可以跟作者索取相關已完成的證明。

9. 消費者均衡與需求函數推導的圖解

【圖 1】圖解消費者均衡的決定過程。在【圖 1】的上圖中，橫軸表示商品 x 的數量，縱軸衡量商品的邊際效用與價格的效用。其中， $\phi_x(x)$ 線表示商品的邊際效用， $\psi^p(p)$ 線表示價格 p 元的邊際效用。

直線 $\phi_x(x)$ ，在縱軸($x=0$)的截距是 $\phi_x(0)$ ，斜率是 $\phi_{xx}(x)$ 。在商品的邊際效用遞減 $\phi_{xx} < 0$ 的假設下，其斜率為負。為了作圖方便起見，此線畫成直線。另外，直線 $\psi^p(p)$ ，在縱軸($x=0$)的截距 $\psi^p(p)$ ，斜率是 $\psi_x^p(p)$ 。在 $\psi_x^p = 0$ 的假設下，消費者所購買的商品數量高低，不會直接或間接透過影響消費者所保有的剩餘現金或財富的多寡而改變價格的效用的大小，其斜率為零，所以此線為水平直線。

在【圖 1】的下圖中，橫軸也是表示商品數量多寡的 x 值，縱軸表示 x 商品價格高低的 p 值。

考慮在每單位商品價格 p 元時，一位擁有財富或所得水準 M 元的消費者的購買行為。當消費者商品需求數量為 x^a 時，若消費者對第 x^a 單位商品的偏好高於對商品價格 p 元的偏好，這等價於商品的邊際效用 $\phi_x(x^a)$ 高於價格的效用 $\psi^p(p) = a^p$ ，所以 $\phi_x(x)$ 直線的垂直高度大於 $\psi^p(p)$ 直線的高度(高多少不重要)，此時消費者會購買與消費第 x^a 單位商品，並且有動機考慮增加購買數量。相反的，當消費者商品需求數量為 x^b 時，若消費者對第 x^b 單位商品的偏好低於對商品價格 p 元的偏好，這等於是說商品的邊際效用 $\phi_x(x^b)$ 低於價格的效用 $\psi^p(p) = b^p$ ，所以 $\phi_x(x)$ 直線的垂直高度小於 $\psi^p(p)$ 直線的高度，此時消費者不會購買與消費第 x^b 單位商品，並且有動機考慮減少購買數量。特別值得注意的，當消費者商品需求數量為 x^* 時，若消費者對第 x^* 單位商品的偏好等於對商品價格 p 元的偏好，這等同於商品的邊際效用 $\phi_x(x^*)$ 等於價格的效用 $\psi^p(p)$ ，所以 $\phi_x(x)$ 直線的垂直高度等於 $\psi^p(p)$ 直線的高度，此時消費者買不買此 x^* 邊際單位商品，對她來說沒有差異(我們假設消費者會購買此單位的商品)，並且消費者有動機不再增減其購買數量。此時，消費者此時達到均衡，即(除非出現多重解的狀況)均衡出現在上圖中兩線交點 e^* 上，將此均衡點所對應的價格 p 與數量 x^* 畫在下圖中就是均衡點 E^* 。 E^* 所對應的商品數量，就是消費者的一個最佳的需求數量。

接著，圖解需求曲線的推導過程。

在【圖 2】的上圖中，因為價格上漲對 $\phi_x(x)$ 沒有影響，這表示當價格由 p 上漲至 \hat{p} 時， $\phi_x(x)$ 直線不動。

價格 p 上漲，對 $\psi^p(p)$ 的影響為 $\psi_p^p(p) > 0$ 。這表示當價格由 p 上漲至 \hat{p} 時， $\psi^p(p)$ 直線上移至 $\psi^p(\hat{p})$ 的位置。其中， $\psi^p(p)$ 與 $\psi^p(\hat{p})$ 兩線在縱軸 ($x=0$) 截距分別是 $\psi^p(p)$ 與 $\psi^p(\hat{p})$ ，且 $\psi^p(p) < \psi^p(\hat{p})$ ，因此縱軸上的截距會往上移動。總而言之，這表示 $\psi^p(p)$ 線平行往上移動。

因此，當價格由 p 上漲至 \hat{p} 時，圖中 $\psi^p(p)$ 線往平行上移至 $\psi^p(\hat{p})$ 線的位置。新均衡出現在上圖兩線的新交點 \hat{e}^* 上，此均衡點所對應的價格 \hat{p} 與數量 \hat{x}^* 是下圖中的均衡點 \hat{E}^* ，連接 E^* 與 \hat{E}^* 可畫出負斜率的個人需求線 $x^d = x^d(p)$ 。

由於在此最基本的模型中，所得的高低不會直接或間接地影響商品與價格的效用函數，所以所得變動在此不對消費者均衡條件與需求線造成任何影響。所以不需要畫出所得變動的相關圖形。

最後，單調轉換只是使得表示商品的邊際效用的 $\phi_x(x)$ 線，以及表示價格 p 元的效用 $\psi^p(p)$ 線，在平面在做等距離的向上移動(如平方的轉換)或向下移動(如開根號的轉換)，轉換後的新均衡交點與舊均衡交點所對應的購買數量是不會改變的。更簡單的作圖方法是，將單調轉換想成只是改變縱軸上衡量商品的邊際效用與價格效用的刻度，重新標示縱軸上每一個刻度的效用數值的大小而使得商品的邊際效用 $\phi_x(x)$ 線和價格 p 元的效用 $\psi^p(p)$ 線完全維持不動，此時新舊的均衡點在圖形上完全重疊，所對應的購買數量當然也完全不變。

10. 結語：解開謎團的關鍵

最後，我重述林忠正(2015)〈序數與基數效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉文章中的一些論述，來解釋解開這項謎團的關鍵的一種可能的思維過程。¹²

¹² 有趣的是，我不是先知道經濟學的現代兩種效用理論都存在嚴重的問題，因此才致力於發展一項取代性的新理論。事實上，整個故事的情節是完全相反的，我的學習經驗與體會告訴我，現在的理論實在問題重重，但我僅知它有缺陷但不知其缺陷何在也不知其原因，更不知道經濟史上的種種精彩的相關的真實故事。也就是，我感到現代個體選擇理論很離譜，但不清楚知道離譜的原因與癥結，就開始發展一套至少能

無疑地，一項兩全其美的理論，必須同時具有兩項特性。第一項特性是效用應該是序數的概念，也就是效用數值是只能排序大小的概念，這是最好的效用概念。「任何經濟學的法則必須以一種它不受效用指數函數的任意選擇所影響的方式來加以建構的 (Any law in economics must be formulated in a way that it is not affected by arbitrary choice of the utility index function.)。」既然效用是序數的，所以一個序數效用函數單調轉換後還是可表示同一偏好的概念也是對的。這進一步表示「一次微分項的正負符號有意義而二次微分項的正負符號無意義」，這兩項衍生的觀點也當然都是對的。但是在另一方面，第二項特性是邊際效用遞減與以「交叉邊際效用項」(「總效用交叉二次微分項」)正負來定義互補品與替代品也是對的，這是最基本的經濟學常識。

但是令人深感困惑的一個焦點是，在現代效用理論中邊際效用遞減法則等概念是基數效用理論的同義詞，是與序數總效用理論不能並存的概念。這項難題的關鍵是因為必須用到或進行單調轉換前後總效用函數的二次微分才能獲得邊際效用遞減的數學項而衍生的難題。突破這個「需要進行二次微分」才能獲得邊際效用遞減的數學式的環節，就是一項兩全其美的理論所面對的最基本的關卡或挑戰。簡單地說，我們需要的效用理論是序數效用理論，所以我們必須承認單調轉換的特性；但是同時，我們也堅持邊際效用遞減等純粹或交叉邊際效用項的概念與後續理論的經濟意義的正確性。那如何能合理地建構出一套兩全其美的理論呢？

這項最基本的關卡或挑戰，肇因於在單調轉換前後的不同的序數總效用函數，所對應的「純粹的與交叉邊際效用項」或「總效用純粹的與交叉二次微分項」的正負符號不能維持固定不變的數學特性。所以，一個解決此問題的正式出路，就是要建構一套只需要用到進行單調轉換後一次微分項的理論，而不需要用到進行單調轉換前後的不同的序數效用函數的「第二次微分」的理論，就能獲得邊際效用遞減所對應的數學式。怎樣可以擁有邊際效用遞減(或遞增)的概念，但此概念卻不是來自總效用的第二次微分呢？一個方法就是邊際效用遞減(或遞增)的概念是來自於邊際效用的一次微分，而不是來自總效用的二次微分，也就是我們需要一套直接以邊際效用為出發點的效用理論，即放棄以總效用理論為出發點的序數效用理論，而建構一套以「序數邊際效用理論」，來取代 Pareto-Slutsky-Hick-Allen 的「序數總效用理論」。

夠說服我自己的新理論。我對相關文獻毫無概念，甚至連什麼是序數效用與甚麼是基數效用也幾乎完全沒有概念，或應該說觀念不正確。所以，這裡所謂的「解開這項謎團的關鍵的一種可能的思維過程」，是一種事後的反省而不是事先的規劃。

停下來稍微想一想，或許你會同意，消費者的最適行為其實是建構在邊際效用的條件之上，由總效用出發必須經過邊際效用與其價格之比相等的關卡，才得到消費者的最適選擇條件，邊際效用而不是總效用才是提供經濟學問題的謎題的真正的關鍵鑰匙。邊際效用才是經濟決策的核心與出發點。(從總效用出發開始進行消費者行為分析，一定得經過邊際條件；但反過來，從邊際均衡條件開始進行分析，則不需要經過總效用的關卡。所以由邊際效用出發是比從總效用出發更省力與更聰明的決策方式。)

古典的邊際三傑中的 Jevons 也曾表達類似的看法，Moscati (2013) 就曾強調說：「就像其他早期邊際主義者一樣，Jevons (1871, 61-68) 假定每種商品的邊際效用終將下降。Jevons 的經濟理論顯著的依賴這一假設，但這並不意味著他的推理是建立在總效用是可以區段或間隔(interval)衡量的或基數效用分析的概念上。事實上，對於他來說，邊際效用，而不是總效用，才是『轉動整個經濟理論』的關鍵概念。邊際效用決定了商品如何於不同的用途之間進行分配、商品之間的交換法則、以及勞動的報酬。總效用在經濟上重要性是居於次要的地位的，並且通常，它比邊際效用更難以評估 (61)。」

由 Pareto 所發起的序數效用革命是導源於無異曲線偏好排序概念的啟發，即位處於越高位置的無異曲線表示愈高的偏好位階，給予不同無異曲線的效用數值只有大小次序有意義但數值差異沒有意義，這就是一種從總效用出發的理論。每一條無異曲線所對應的就是一個總效用，由無異曲線出發的理論就是由總效用出發的理論。但能納入邊際效用遞減等常識性概念的序數效用理論，也就是能真正成功實現序數效用革命的理論卻是必須放棄總效用概念，也就是必須放棄無異曲線概念的理論，即必須放棄效用極大化的理論。放棄效用極大化的理論，這表示我們必須改變經濟模型的外貌或外在表示方式，這不只會劇烈地改變個體選擇理論的外貌，也會改變個體理論或價值理論的一些相關的內涵。

序數效用革命導源於無異曲線的啟發，但要完成序數革命的理論卻是必須放棄革命的源頭：無異曲線理論。一方面，這充滿矛盾性與諷刺性，另一方面，這或許也就是為何要完成序數效用革命會如此困難的其中一項癥結。

就如，Mark Blaug (2001)所說的：「我們目前的經濟理論，並非早就注定的。假若幾年前，經濟學在關鍵的岔點上，選擇了另一個轉折，那我們今天有可能就會鼓吹不同的經濟理論。」也就是選擇由邊際效用而不是由總效用(無異曲線)出發來建構序數效用理

論，我們今天有可能就會採用或鼓吹一套不同的經濟理論。

但此問題癥結，可能還不是要成功解決此兩難困境的最大困難。事實上，費盡心思地想要尋覓出一條突破兩難困境之路的 Bernardelli (1952 與 1954)，就曾經嘗試以「放棄總效用而由邊際效用出發」的提案來尋求兩全其美的理論，但沒有成功。Bernardelli 的經驗顯示，要建構合理的兩全其美的理論，單單以「邊際效用取代總效用作為個體決策出發點」的概念，還不足以構成達成終極目標的終南捷徑。看樣子，必須要同時引進更有新意的概念的重建工程才能畢竟其功。

就如，在數學的領域中，要如何解決一些重量級的臆測，如費馬臆測(費馬定理)與黎曼臆測等，之所以非常重要。其中一個關鍵原因是，要成功解出這些臆測，所需要的技巧，「不是寫下眾人常忽略的一兩行式子，就可以得證，而是不得不發展出一套全新的數學支派不可。」

就像 Bell (1998)所著的《大數學家》(*Men of Mathematics*)中所說的「證明這些臆測之所以重要，是因為要證明這些臆測之前，得先證出其他更大更深的定理，那是個浩大的工程。如果只是很投機取巧的證明，沒有建立任何新的學說，不太可能獲得人家認同。基本的假設是，如果要證出像費馬定理這類重量級的東西，就不得不發展出一套全新的數學支派不可。但如果只是玩弄技巧，寫下眾人常忽略的一兩行的式子，就可以得證的，此時，別人可能會恭維幾句：「天啊！你真聰明！」之類的話；不過真的算不上什麼偉大的成就。」

依據同樣的道理，要成功提出一項兼容序數效用與邊際效用遞減的新理論，應該也「不是寫下眾人常忽略的一兩行式子，就可以得證，而是不得不發展出一套全新的經濟學支派不可。」

這可能就是為何要提出一項兩全其美的新效用理論如此艱困的真正的癥結所在。其實，更誇張而難以令人相信與接受的是，新理論可能不是必須「發展出一套全新的經濟學支派」，而是野心更大的「發展出一套全新的可取代舊理論的經濟學支派」。

Reference

- 林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(1)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(2)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色：難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(3)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(I)：效用極大化的 Marshall 模型與無意義的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(4)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(II)：Marshall 的「邊際需求價格」模型與古典效用可衡量概念的意義〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(5)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈為 Marshall 需求理論編寫一冊返回經濟學舞台的劇本：比較商品效用與價格效用的邊際摸索決策方式的 Marshall 模型〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(6)，研討論文。
- 高景仲、賴建誠譯，(2002)，〈不要談思想史，拜託，我們是經濟學家〉。
- 邢慕寰譯，(1967)，《需求理論的修正》(A Revision of Demand Theory)，台北市：台灣銀行經濟研究室。
- E. T. Bell 原著，井竹君等譯，(1998)，《大數學家》(Men of Mathematics)，九章出版社。
- Allen, R.G.D. (1934) "A Comparison between Different Definitions of Complementary and Competitive Goods," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 2:2, pp. 168-175.
- Allen, R.G.D. (1935) "A Note on the Determinateness of the Utility Function," *Review of Economic Studies*, 2, pp. 155-158.
- Alt, F. (1936) "Über die messbarkeit des nutzens," *Journal of Economics*, 7:2, pp. 161-169.
- Alt, F. (1971) "On the Measurability of Utility," In Chipman, J.C. et al. eds., *Preferences, Utility and Demand*, pp. 424-31, Jovanovich.

- Bernardelli, H. (1934) “Notes on the Determinateness of the Utility Function: II,” *Review of Economic Studies*, 2, pp. 69–75.
- Bernardelli, H. (1938) “The End of the Marginal Utility Theory?,” *Economica*, 5:18, pp. 192-212.
- Bernardelli, H. (1952) “A Rehabilitation of the Classical Theory of Marginal Utility,” *Economica*, 19:75, pp. 254-268.
- Bernardelli, H. (1954) “Comment on Mr. Lancaster’s ‘Refutation’,” *Economica*, pp. 240-242.
- Blaug, M. (2001) “No History of Ideas, Please, We’re Economists,” *Journal of Economic Perspectives*, 15:1, pp. 145-64.
- Brown, E.P. (1934) “Notes on the Determinateness of the Utility Function: I,” *The Review of Economic Studies*, 2:1, pp. 66-69.
- Eiseley, L.C. (1958) *Darwin’s Century: Evolution and the Men who Discovered it*, Doubleday.
- Gossen, H.H. (1854) *Entwicklung der gesetze des menschlichen verkehrs, und der daraus fließenden regeln für menschliche handeln*, F. Vieweg.
- Hicks, J.R. (1956) *A Revision of Demand Theory*, Oxford: Clarendon Press.
- Hicks, J.R. and R.G.D. Allen (1934) “A Reconsideration of the Theory of Value,” *Economica*, NS, 1: 52–76, 196–219.
- Hudík, M. (2014) “Reference-Dependence and Marginal Utility: Alt, Samuelson, and Bernardelli,” *History of Political Economy*, 46:4, pp. 677-693.
- Jehle, G.A. and P.J. Reny (2011) *Advanced Microeconomic Theory*, Pearson Education India.
- Jevons, W.S. (1871) *The Theory of Political Economy*, Macmillan & Co.
- Keynes, J.M. (1936) *The General Theory of Interest, Employment and Money*, Create Space Independent Publishing Platform.
- Lancaster, K. (1953) “A Refutation of Mr. Bernardelli,” *Economica*, 19, pp. 259–262.
- Lange, O. (1934a) “The Determinateness of the Utility Function,” *Review of Economic Studies*, 1, pp. 218–25.

- Lange, O. (1934b) “Notes on the Determinateness of the Utility Function: III,” *Review of Economic Studies*, 2, pp. 75–7.
- Lenfant, J.S. (2006) “Complementarity and Demand theory: From the 1920s to the 1940s,” *History of Political Economy*, 38, pp. 48-85.
- Moscatti, I. (2013b) “Were Jevons, Menger and Walras really Cardinalists? On the Notion of Measurement in Utility Theory, Psychology, Mathematics, and Other Disciplines, 1870–1910,” *History of Political Economy*, 45, pp. 373–414.
- Pareto, V. ([1909] 1971) *Manual of Political Economy*, New York: Kelley.
- Rothbard, M. (1956) “Toward a Reconstruction of Utility and Welfare Economics,” in Mary Sennholz ed. (Princeton, N.J: D. Van Nostrand, 1956), reprinted in *The Logic of Action One: Method, Money, and the Austrian School* by Murray N. Rothbard (London: Edward Elgar, 1997, pp. 211-255. Mises.org’s online edition copyright.
- Samuelson, P.A. (1938) “The Numerical Representation of Ordered Classifications and the Concept of Utility,” *Review of Economic Studies*, 6, pp. 65–70.
- Samuelson P.A. (1939) “The End of Marginal Utility: A Note on Dr. Bernardelli’s Article,” *Economica*, pp. 86-87.
- Stigler, G.J. (1950) “The Development of Utility Theory,” *The Journal of Political Economy*, pp. 307- 396.
- Varian, H.R. (1996) *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*, W&W Norton.





