當無異曲線分析法被淘汰時用什麼來取代 Slutsky 方程式

新理論價格變動的需求效果

林忠正*
中央研究院經濟所研究員
國立政治大學財政系教授
國立交通大學經營管理研究所教授
台北市南港區(115-41)研究院路 2 段 128 號
中央研究院經濟所
電話: 886-2-2782-2791 轉 507
電子信箱: cclin@econ.sinica.edu.tw

開始撰稿-2016年1月2日
完稿時間-2016年1月27日
列印時間-2016年4月18日

*謝謝林曉珮助理非常有效率的協助，也很謝謝政大財政研究所所江若妘同學的細心校稿。

當無異曲線分析法被淘汰時用什麼來取代 Slutsky 方程式

新理論價格變動的需求效果

[摘要]在新理論中，因為不再對整個商品組合進行偏好排序，所以不再有總效用函數，也不再有無異曲線,也因此不再有維持在相同的無異曲線之上的替代效果與維持相同相對價格的所得效果的區分了。那麼，在新的理論中，因為不再有 Slutsky 方程式了，那新理論中的價格變化對需求量的影響的方程式,會變成怎麼樣呢？有新的類似的方程式來替代嗎？在這篇簡單的文章中,將論述我們的確可以發展出新的方程式來刻劃價格變動對商品需求數量的消費者最適行為的變化。並且我們將討論新的用來取代 Slutsky 方程式的新方程式，是不是會表現得比原先的 Slutsky 方程式更好、更合適、更合理、更自然、且更豐富呢？如果答案是否定的，那麼我們就將新理論掃進垃圾桶中，不要再談論、討論與分析它了。反之，如果答案是肯定的，那麼我們就再給新理論暫時的生存空間，然後繼續走上下一階段或下個題材的個體選擇理論的重建旅程，繼續以最嚴格的標準來檢驗新理論的合理性。

JEL 分類：B130, D110

1. Slutsky-equation 的故事

新古典的 Pareto-Slutsky-Hicks-Allen 無異曲線分析架構的基本思維或運作邏輯，可以簡單述說如下。

首先，此分析架構的第一個假設是人有能力對不同的商品組合進行偏好排序，若個人偏好滿足完整性、遞移性、單調性(商品數量愈多愈好的意思)等基本公設，則我們可以找到一個序數總效用函數來刻劃消費者對不同商品組合的偏好次序。也就是，愈受偏好的商品組合放入此序數總效用函數中所獲得的效用數值愈高，這項效用數值相對大小次序反映偏好相對高低次序的特性就是「序數效用理論」的核心精神。因此，只要能反映相同偏好次序的效用數值數列或效用函數都是合格的效用函數，並且任何一個合格的效用函數經過任何正向單調轉換之後所獲得的新的效用函數，所表示不同商品組合的偏好次序的效用數值的大小次序始終維持不變，因此也可以用來代表相同的偏好次序。

其次，在由偏好排序推導得序數總效用函數之後，消費者還不能決定應該選擇哪一個商品組合作為最適決策，而必須要再藉由在預算限制下極大化總效用的決策方式，來決定最佳的消費組合。消費者因而必須被假設天生就擁有微分的數學技術，能以求取最適化決策的一階條件與二階條件的方式進行最適決策，以求取其最適的消費組合。

一階條件是指在既定的預算限制下找出所達到的最高效用的無異曲線，即與既定預算限制線相切的無異曲線。無異曲線與預算限制線相切的條件，則是著名的邊際替代率等於相對價格，或是同樣著名或更著名的消費者花費在不同商品上面的最後一塊錢所獲得的邊際效用都相等的條件。你是否還記得在林忠正(2016)的編號第 16 號的《黑箱理論：序數總效用理論的劣等品理論》文章中，我們介紹過 Schultz (1935)的知名《需求、價格和所得的相互關係》(Interrelations of Demand, Price and Income)文章中，如此解釋這一重要的均衡式：「他的加權的最終程度的效用是彼此相等，權重恰好是它們價格的倒數。價格除以最終程度的效用可得到該商品單位的『錢的或貨幣價值』(dollar’s worth)。因此，這些方程式意指，在邊際上，花在所有商品上的每一塊錢的『錢的或貨幣價值』是一樣的。」[1]另外，二階條件則是指無異曲線會凸向原點，以確定滿足一階

[1] 原文是：”His weighted final degrees of utility are equal to each other, the weights being the reciprocals of the prices. To divide the final degree of utility by the price is to make the unit of the commodity the “dollar’s worth.” These equations mean, therefore, that at the margin, the utility of a “dollar’s worth” is the same for all commodities.”

條件的消費組合是預算限制下的效用極大值，而非效用極小值。

第三，在獲得刻劃消費者最適消費組合的條件之後，因為商品的邊際效用是很難觀察與不可衡量的概念，所以我們無法藉由一階條件直接主張消費者真的會選取哪一個特定的商品組合，經濟理論的能力與有用性其實相當有限。我們能做的通常就是必須透過所謂的比較靜態分析，以探討當外生變數(所得與價格)變動之後，在消費者還是維持受預算限制下的效用極大的最適均衡決策之下，內生變數(商品組合)會隨之進行怎樣的調整。

在消費理論中，兩個主要的或最基本的外生變數就是消費者的外生所得與商品價格，內生變數就是商品組合。通常，我們會先分析消費者外生所得變動會如何改變消費者的最適商品組合。商品組合的變化就是商品組合內的各個商品的數量可能會發生改變的意思。也就是，消費者所得變動會引起消費者調整其對不同商品的購買數量，有些商品的購買數量會增加、有些會減少、有些會維持不變。隨著所得提高購買數量增加的商品，在現代理論中就被稱為正常品；隨著所得提高購買數量減少的商品，在現代理論中就被稱為劣等品；隨著所得提高購買數量維持不變的商品，在現代理論中就被稱為中立品。(因為在序數總效用理論中，我們不能以所得提高對商品邊際效用的影響的正負的心理角度來定義正常品和劣等品等概念。)

在進行過所得變動的比較靜態分析之後，接下來真正的重頭戲，是進行價格變動的比較靜態分析。在當前的標準理論中，價格變動對最適消費組合的影響，反映在所謂的 Slutsky 方程式，也就是價格的數量效果可以分解成替代效果與所得效果，替代效果是在原來的無異曲線之下純粹由相對價格變化所引起的需求數量的變化，所得效果則是總效果減掉替代效果的殘差值，也就是在相對價格不變之下純粹因所得變動所引起的需求數量的變化。由於序數總效用理論總是要求無異曲線必須凸向原點才會有內部均衡解，或邊際替代率必須遞減，所以自身價格變動的替代效果一定是負值，而所得效果則可正、可負、可零。(但為何所得效果會如此則不能置一詞，只能是一種黑箱理論。) 負的替代效果加上可正可負的所得效果，所構成的自身價格變動的總效果因此也就可負可正了。

這樣將價格變動的總效果拆解成替代效果與所得效果的想法，是無異曲線分析法的一項特殊性質，這項特殊性質就具體呈現於所謂的 Slutsky 方程式的意義之中。

因此在新古典的 Pareto-Slutsky-Hicks-Allen 的無異曲線的分析架構中，Slutsky 方程式就捕捉了價格變動對消費者購買行為影響的基本思維或運作邏輯。換句話說，建立在無異曲線概念的 Slutsky 方程式，在探討價格的影響力時，扮演著核心的角色。

現在，更換一種全新的理論場景，來看看新的理論。新序數的邊際效用分析法的思維方式，可以簡單說明如下。

首先，新分析架構的第一個假設是人有能力對一個交易或交換機會的「一得」與「一失」進行跨價值觀的偏好排序。我預期在滿足一些基本公設之下，我們可以找到一個「一得」的邊際效用函數與一個「一失」的邊際效用函數，來刻劃消費者的偏好次序。當我們對「一得」選項的偏好超過「一失」選項的偏好時，「一得」的邊際效用函數的數值會高於「一失」的邊際效用函數的數值；當我們對「一得」選項的偏好低於「一失」選項的偏好時，「一得」的邊際效用函數的數值會低於「一失」的邊際效用函數的數值；當我們對「一得」選項的偏好等於「一失」選項的偏好時，「一得」的邊際效用函數的數值會等於「一失」的邊際效用函數的數值。

這兩個成組配對的序數邊際效用函數會呈現，愈受偏好的選項放入此序數邊際效用函數中所獲得的效用數值愈高的特性，這項效用數值相對大小反映偏好次序的特性就是「序數邊際效用理論」的核心精神。因此，只要能反映相同偏好次序的兩個成組配對的邊際效用數值數列或效用函數都是合格的邊際效用函數，並且任何兩個成組配對的合格的邊際效用函數同時經過任何正向單調轉換之後所獲得的新的兩個成組配對的邊際效用函數也都可以用來代表相同的偏好次序。

其次，消費者的最適抉擇會反映於消費者對「一得」與「一失」剛好等偏好的邊際數量或單位之上，此時「一得」的邊際效用函數的數值剛好等於「一失」的邊際效用函數的數值。這個等邊際效用的條件取代舊理論的一階條件而變成消費者的最適條件。由於此最適條件是偏好排序而來的，而不是由總效用函數微分而來的，所以不需要再假設消費者是天生就會微積分的數學怪人或數學天才了。也不需要再求取所謂的效用極大化的二階條件，這時候在新理論中是以決策調整法則或比較靜態分析的安定條件來取代二階條件。人當然在做決策時不會以個體經濟學家與很多總體經濟學家開口閉口所謂的一階與二階條件來做決策。以決策調整法則或比較靜態分析的安定條件來取代虛擬的不自然的二階條件，是一種非常合理的做法，也是一種最適決策程序過程的合理改進。

第三，與舊理論一樣，在新理論中，在獲得刻劃消費者最適消費組合的條件之後，因為商品的邊際效用與價格的邊際效用都是很難觀察與不可衡量的概念，所以我們無法由最適條件直接主張消費者真的會選擇購買多少商品與保留多少現金，經濟理論的能力與有用性其實相當有限。我們能做的通常就是必須透過所謂的比較靜態分析，以探討當外生變數(所得與價格)變動之後，在消費者還是會維持等邊際效用決策之下，內生變數(商品組合)會隨之進行怎樣的調整。

在消費理論中，兩個主要的外生變數就是消費者的外生所得與商品價格，內生變數就是購買多少商品數量與保留多少現金。消費者所得變動會引起消費者對所關切或討論的商品的購買數量進行調整，有些商品的購買數量會增加、有些會減少、有些會維持不變。隨著所得提高購買數量增加的商品，在新理論中我們不需要再稱之為正常品；隨著所得提高購買數量減少的商品，在新理論中我們不需要再稱之為劣等品；隨著所得提高購買數量維持不變的商品，在新理論中我們也不需要再稱之為中立品。因為在序數邊際效用理論中，我們已經可以以所得提高對商品邊際效用的影響正負的心理角度來定義正常品和劣等品等概念了，這無疑是一種理論的進步。

在進行過所得變動的比較靜態分析之後，接下來的重頭戲，還是進行價格變動的比較靜態分析。在當前的標準理論中，價格變動對最適消費組合的影響，反映在所謂的 Slutsky 方程式。

在新理論中，因為不再對整個商品組合進行偏好排序，所以不再有總效用函數，也不再有無異曲線，也因此不再有維持在相同的無異曲線之上的替代效果與維持相同相對價格的所得效果的區分了。那麼，在新的理論中，因為不再有 Slutsky 方程式了，那新理論中的價格變化對需求量的影響的方程式，會變成怎麼樣呢？有新的類似的方程式來替代嗎？

如果我們的確可以發展出新的方程式來刻劃價格變動對商品需求數量的消費者最適行為的變化，那麼我們接著要問的問題是：我們所發展的新的用來替代 Slutsky 方程式的新方程式，是不是會表現得比原先的 Slutsky 方程式更好、更合適、更合理、更自然、且更豐富呢？

如果答案是否定的，那麼我們就將新理論掃進垃圾桶中，不要再談論、討論與分析它了。

反之，如果答案是肯定的，那麼我們就再給新理論暫時的生存空間，先假設新分析架構可能是正確的分析架構,然後繼續走上下一階段或下個題材的個體選擇理論的重建旅程，繼續以最嚴格的標準來檢驗新理論的合理性。

2. 推導兩種商品的 Slutsky-equation

Slutsky 方程式的討論，通常以「預算限制下極大化兩種商品的總效用模型」為分析背景。這個虛擬故事的場景，如此說：假設一位擁有財富或所得水準 M 元的消費者，在面對單位價格是 p 元的 x 商品，以及單位價格是 q 元的 y 商品時，這一位消費者如何決定購買多少數量的 x 商品以及 y 商品，以追求由 x 商品以及 y 商品所組成的總效用 $U(x,y)$ 的極大。

這種「消費者在預算限制下極大化總效用」的決策或思維方式的經濟模型，設定如下：

(1) $$\max_{x,y} \quad U(x,y); \quad U_x > 0, U_y > 0, \;\; s.t. \quad px + qy = M$$

最適化的一階條件要求：

(2) $$\frac{U_x(x,y)}{U_y(x,y)} = \frac{p}{q}, \quad px + qy = M$$

二階條件要求無異曲線凸向原點，即：

(3) $$H = q^2 U_{xx} - 2pqU_{xy} + p^2 U_{yy} < 0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：

(4) $$x_M = \frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{-H} \gtrless 0$$

(5) $$y_M = \frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{-H} \gtrless 0$$

價格變動對購買數量的效果為：

(6) $$x_p = \frac{qU_y}{H} + x\frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{H} = \frac{qU_y}{H} - xx_M \gtrless 0$$

(7) $$y_p = -\frac{qU_x}{H} + x\frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{H} = -\frac{qU_x}{H} - xy_M \gtreqless 0$$

(8) $$x_q = -\frac{pU_y}{H} + y\frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{H} = -\frac{pU_y}{H} - yx_M \gtreqless 0$$

(9) $$y_q = \frac{pU_x}{H} + y\frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{H} = \frac{pU_x}{H} - yy_M \gtreqless 0$$

以上的式(6)-(9)，就是標準的 Slutsky 方程式。等號右邊的第一項就是替代效果，而第二項就是所得效果。

依正常的分析流程,接下來我們會對上述的 Slutsky 方程式的細節做進一步的分析與解釋。在此，我們直接引用 Hicks (1939)在《價值與資本》的書中，對所得效果與替代效果的相關解釋，Hicks 當時如是說：

> 三、現在讓我們進一步考慮價格變動的影響。我們在這裡同樣由兩種貨品開始討論。現在所得和 *Y* 的價格都被看作固定不變，只有 *X* 的價格變動。各種消費可能現在表現於圖解上（圖七）連結 M（OM 代表用 *Y* 衡量的所得，因而是固定的）和 OX 軸上隨 *X* 的價格變動而變動的各點的許多條直線。*X* 的每一個價格決定一條 LM 線（OL 隨價格下降而增加）；相當於每一個價格的均衡點，決定於 LM 線與一條無異曲線接觸之點。連結這些均衡點的 MPQ 曲線，可以稱為價格消費曲線(price-consumption curve)，它表示當 *X* 的價格變動而其他一切事物均不變時消費變動的情形。
>
> 這樣，由某一個位置的 LM 出發，我們得到兩組直線和相應的接觸點。我們有平行於 LM 而與無異曲線接觸之諸點形成所得消費曲線的直線，我們又有通過 M 而與無異曲線接觸之諸點形成價格消費曲線的直線。任何一條無異曲線必然與每一組直線中之一線接觸。試取無異曲線 I_2，這一條曲線高於與 LM 接觸的無異曲線 I_1，而與平行於 LM 的一條直線接觸於 P'，與通過 M 的一條直線接觸於 Q。我們由圖解（內向凸出的形狀）立刻可以明白，Q 一定在 P'的右方。這個通性，對新有高於原來那一條的無異曲線都能成立；因此可以推斷當我們前進到較高的無異曲線時，通過 P 點的價格消費曲線一定總是在通過 P 點的所得消費曲線的右方（圖八）。

這個看來像是一點幾何的命題，實際上有很多經濟意義，而且是大部分價值理論的基礎。現在讓我們看看它的含義。

當 *X* 的價格下降時，消費者沿著價格消費曲線由 P 點移到 Q 點。我們現在知道，由 P 到 Q 的移動等於沿著所得消費線由 P 到 P'的移動，和沿著一條無異曲線由 P'到 Q 的移動。我們將發現，把價格對需求的影響看作兩個分開的部分大有助於理解。

一種商品價格下降在實際上是經由兩條不同的路線影響它的需求。一方面價格下降使消費者較從前寬裕，提高了他的「實質所得」，所以沿著這一條路線的影響正如同所得增加的影響。在另一方面，它改變了相對價格；因而除上開實質所得的變動以外，價格下跌的商品還有替代其他商品的趨勢。它對需求的全部影響，就是這兩個趨勢的總和。

我們可以進一步證明，這兩個趨勢的相對重要性取決於消費者在這種商品(*X*)和其他商品上面其支出的比例。因為他由於 *X* 的價格下跌而較從前寬裕的程度將視他原來購置的 *X* 數量而定；如果對他的所得而言那個數量相當地大，他將比以前寬裕得多，因而第一個影響（我們可以稱之為所得效果 income effect）就很重要；但是如果那個數量相當地小，他得到的好處也就不多，因而所得效果可能被替代效果(substitution effect)淹沒。

在此文章中，接著，我們想換另一個模型來進行分析。

我們要分析的新模型是將原先的兩個選項都是商品的模型，改成兩個選項一個是商品而另外一個是現金的模型。這樣做的目的是為了方便與我們的「一得」與「一失」的序數的邊際效用分析法的基本模型相比較，因為新理論的基本模型是一種以現金買商品的交易理論，也就是消費者的兩個選項一個是商品而另外一個選項是現金的模型。

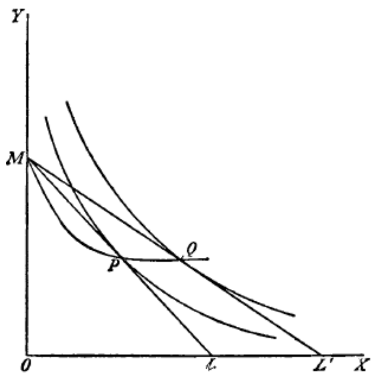

Fig. 7.

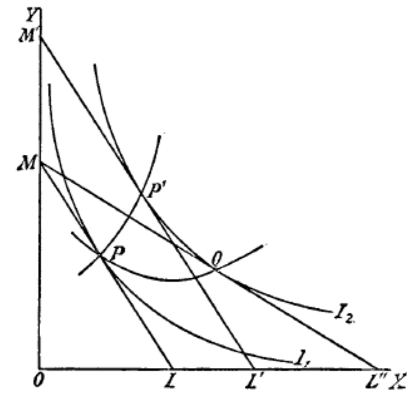

Fig. 8.

3. 推導一種商品與現金的 Slutsky-equation

兩個選項一個是商品而另外一個是現金的「消費者在預算限制下極大化總效用」的決策或思維方式的經濟模型，設定如下：

(10) $$\max_{x,m} \quad U(x,m); \quad U_x > 0, U_m > 0, \; s.t. \quad px + m = M, \; q = 1$$

最適化的一階條件要求：

(11) $$\frac{U_x(x,m)}{U_m(x,m)} = p, \quad px + m = M$$

二階條件要求無異曲線凸向原點，即：

(12) $$H = U_{xx} - 2pU_{xm} + p^2 U_{mm} < 0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量與持有現金的數額的效果為：

(13) $$x_M = \frac{U_{xm} - pU_{mm}}{-H} \gtrless 0$$

(14) $$m_M = \frac{pU_{xm} - U_{xx}}{-H} \gtrless 0$$

價格變動對購買數量與持有現金的數額的效果為：

(15) $$x_p = \frac{U_m}{H} + x\frac{U_{xm} - pU_{mm}}{H} \gtrless 0$$

(16) $$m_p = -\frac{U_x}{H} + x\frac{pU_{xm} - U_{xx}}{H} \gtrless 0$$

現在我們藉由將總效用函數進行正向單調轉換的分析，來說明無異曲線分析法在不用到總效用二次微分項的正負符號的經濟意義時，是一種效用不可衡量的序數效用的概念。

正向單調轉換後的 Pareto-Slutsky-Hicks-Allen 消費模型變成：

(17) $$\max_{x,m} \quad V(x,m) = F(U(x,m)); \quad F' > 0, \; s.t. \quad px + m = M$$

最適化的一階條件要求：

(18) $$\frac{V_x(x,m)}{V_m(x,m)} = p, \quad px + m = M$$

二階條件要求無異曲線凸向原點，即：

(19) $$J = V_{xx} - 2pV_{xy} + p^2 V_{yy} < 0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量與持有現金的數額的效果為：

(20) $$x_M = \frac{V_{xm} - pV_{mm}}{-J} \gtrless 0$$

(21) $$m_M = \frac{pV_{xm} - V_{xx}}{-J} \gtrless 0$$

價格變動對購買數量與持有現金的數額的效果是：

(22) $$x_p = \frac{V_m}{J} + x\frac{V_{xm} - pV_{mm}}{J} \gtrless 0$$

(23) $$m_p = -\frac{V_x}{J} + x\frac{pV_{xm} - V_{xx}}{J} \gtrless 0$$

接著，我們證明正向單調轉換前後的分析結果會一樣。首先，單調正向遞增轉換前後的最適化一階條件完全相同，因為：

(24) $$\frac{V_x}{V_m}=\frac{F'U_x}{F'U_m}=\frac{U_x}{U_m}=p$$

其中，$V_i=F'U_i;\quad i=x,m$。這表示單調正向轉換後的最適化條件不變，即最適解的數值不變。

其次，由無異曲線分析法的基本特性來看，正向單調轉換前後的效用函數表示相同的偏好，所獲得的分析結果(總結果)應該一樣才對。所以，我們應該可以證明正向單調轉換前後兩個模型的比較靜態分析的總效果或最後的結果會完全相同。

這證明過程非常簡單，將正向單調轉換$V(x,m)=F(U(x,m))$關係式，所會衍生的一些關係式，如$V_{ij}=F'U_{ij}+F''U_iU_j;\quad i,j=x,m$，代入相關方程式中，我們就可以證得它們各自所得變動對購買數量與持有現金的數額的效果相等，即：

(25) $$x_M=\frac{V_{xm}-pV_{mm}}{-J}=\frac{U_{xm}-pU_{mm}}{-H}$$

(26) $$m_M=\frac{pV_{xm}-V_{xx}}{-J}=\frac{pU_{xm}-U_{xx}}{-H}$$

價格變動對購買數量與持有現金的數額的效果也會相等：

(27) $$x_p=\frac{V_m}{J}+x\frac{V_{xm}-pV_{mm}}{J}=\frac{U_m}{H}+x\frac{U_{xm}-pU_{mm}}{H}$$

(28) $$m_p=-\frac{V_x}{J}+x\frac{pV_{xm}-V_{xx}}{J}=-\frac{U_x}{H}+x\frac{pU_{xm}-U_{xx}}{H}$$

其中，可證明 $J=V_{xx}-2pV_{xy}+p^2V_{yy}=F'H<0$。

因此我們藉由數學證明可發現總效用函數經過正向單調轉換後，不會影響消費者的均衡條件，也不會影響比較靜態分析的整體的或最後的結果。這就驗證了無異曲線分析法的基本特性，也就是正向單調轉換前後的效用函數，表示相同的個人偏好。既然是代表相同的偏好，因此也應該隱含相同的個人行為。

在 Pareto-Slutsky-Hicks-Allen 的序數總效用分析法或無異曲線分析法之下，價格變化對需求量影響的總效果，可以拆解成替代效果與所得效果。替代效果是價格變動，不

是間接透過所得變動(排除掉透過所得變動)的管道，所產生的需求數量變動的效果(指商品邊際效用與貨幣邊際效用的相對價格變化的效果)。所得效果是價格變動，間接(純粹)透過所得變動的管道，所產生的需求數量變動的效果。替代效果就記錄在方程式(27)與(28)中兩個分項的第一項，而所得效果就記錄在方程式(27)與(28)中兩個分項的第二項。

4. 新理論消費者的決策思維

新理論假設當一位消費者看到一項能勾起他購買慾望的物品的時候，消費者內心開始思索要不要(或值不值得)以該商品的價格加以購買，並且消費者會思考要多買幾單位。

我們假設消費者會衡量將這單位價格花在這單位商品上是不是值得的的方式來進行思考。不論是對第一單位、第二單位…都採取這種商品效用與價格成本的比較方式。

消費者每一次的選擇(每一單位要不要買)所面對的就是「一得」與「一失」之間的取捨，「一得」就是取得該單位商品對消費者的意義，「一失」就是所必須付出的第 p 元的價格對消費者的意義。要在「一得」與「一失」之間進行取捨，其實，消費者只要知道「一得」與「一失」的相對重要性高低即可，而不需要知道相對重要性或意義高多少。也就是，消費者只要能判斷哪一邊他比較偏好(比較喜歡)或一樣喜歡即可。

當消費者走進店裡時擁有財富或所得水準 M 元，該商品的單位價格是 p 元，若消費者決定採購 x 單位，則在付出 px 元的代價後會剩下 $M-px$ 元。

我們用商品的邊際效用 ϕ_x 來代表第 x 單位商品對消費者的意義，用價格的效用 ψ^p 來代表第 p 元的價格對消費者的意義；則這兩個函數可以被表示為 $\phi_x(x;other\ things)$ 以及 $\psi^p(p;other\ things)$。只要 ϕ_x 與 ψ^p 的相對大小有意義(兩項邊際效用差值的正負有意義，而差值大小不需要有意義)，消費者就可以做出購買決策。

消費者對第 x 單位的商品與第 p 元的價格之間的偏好、(邊際)效用與決策，可由下列關係式加以表示：

(29) $$(x^{th};other\ things)\succ(p^{th};other\ things)\Leftrightarrow\phi_x>\psi^p\Leftrightarrow \text{購買}$$

(30) $$(x^{th};other\ things)\prec(p^{th};other\ things)\Leftrightarrow\phi_x<\psi^p\Leftrightarrow \text{不買}$$

(31) $(x^{th}; other\ things) \sim (p^{th}; other\ things) \Leftrightarrow \phi_x = \psi^p \Leftrightarrow$ 無差異(消費者均衡)

其中，當每一單位商品的售價是固定的時候，則其中所有的 p^{th} 都是相等的。並且，其中「*other things*」精確的表達方式是「*other things being equal*」的意思。

當消費者在決定要不要利用第 x 個 p 元來購買第 x 單位時，消費者等於是在對第 p 元的錢與第 x 單位商品進行偏好排序。若消費者對第 x 個 p 元的錢的偏好程度高於第 x 單位商品的偏好程度，以效用來表示，就是消費者對第 x 個 p 元的錢的邊際效用 $\psi^p(p; other\ things)$ 高於第 x 單位商品的邊際效用 $\phi_x(x; other\ things)$，則消費者不會購買。若消費者對第 x 個 p 元的偏好程度低於第 x 單位的商品的偏好程度，以效用來表示，就是消費者對第 x 個 p 元的邊際效用 $\psi^p(p; otherthings)$ 低於第 x 單位商品的邊際效用 $\phi_x(x; otherthings)$，則消費者會購買。所以簡單地說，消費者會一直購買到若消費者對第 x 個 p 元的偏好程度剛好等於第 x 單位商品的偏好程度，以效用來表示，就是消費者對第 p 元的邊際效用 $\psi^p(p; other\ things)$ 剛好等於第 x 單位的商品的邊際效用 $\phi_x(x; other\ things)$。

在本文中我們假設商品邊際效用函數是：

(32) $\phi_x(x; other\ things) = \phi_x(x; M - px); \phi_{xx} < 0, \phi_{xm} \gtrless 0$

其中，$\phi_{xx} < 0$ 的假設顯示商品的邊際效用遞減的特性。另外，$m = M - px$ 為所購買商品後所持有現金額度。對 x 商品是(事後)所得的正常品、中立品、以及劣等品的定義分別是：

(33a) $\phi_{xm} > 0 \Leftrightarrow$ x 商品是正常品

(33b) $\phi_{xm} = 0 \Leftrightarrow$ x 商品是中立品

(33c) $\phi_{xm} < 0 \Leftrightarrow$ x 商品是劣等品

假設價格效用函數是：

(34) $\psi^p(p; other\ things) = \psi^p(p; x, m = M - px);\quad \psi^p_p > 0, \psi^p_x > 0, \psi^p_m < 0$

$\psi_p^p > 0$的設定意味著商品價格愈高價格的效用愈大；而$\psi_m^p < 0$的假設暗示消費者所保有的現金或財富愈多價格的效用愈低；價格效用中$\psi_x^p > 0$的假定，隱含商品消費數量提高，會因所擁有的商品愈多對所付出的相同價格的看法或評價變高，即商品的稀罕性或新奇性下降了會對所付出的相同數額的錢變得看得比較重。

假設當消費者在購買某特定單位的數量下，若$\phi_x(x;M-px) > \psi^p(p;x,M-px)$則會購買此單位並且會考慮增加購買下一單位；若$\phi_x(x;M-px) < \psi^p(p;x,M-px)$則不會購買此單位，並且會考慮減少購買數量。也就是，消費者的最適購買數量(x)決定於：

$$(35) \qquad \phi_x(x;M-px) = \psi^p(p;x,M-px)\,;\, \phi_{xx} < 0\,,\, \phi_{xm} \gtrless 0\,,\, \psi_p^p > 0\,,\, \psi_x^p > 0\,,\, \psi_m^p < 0$$

等號左邊$\phi_x(x;M-px)$商品的邊際效用是「購買或消費第x單位商品所獲得的消費邊際效用」,等號右邊$\psi^p(p;x,M-px)$價格的效用表示「購買第x單位商品付出的單位價格p元所犧牲的價值」，也就是為購買第x單位商品付出邊際成本的意思。因此，這是一典型的邊際效用等於邊際成本的最適化概念。這一條最適化條件是「交易理論(序數的邊際效用分析法)的基本方程式」。

在新理論中取代舊理論二階條件的內部解的安定條件要求：

$$(36) \qquad \phi_{xx} - p\phi_{xm} < \psi_x^p - p\psi_m^p$$

此式表示在橫軸表示商品x的數量且縱軸衡量商品的邊際效用與價格的效用的平面圖形中，價格效用$\psi^p(p;x,M-px)$曲線的斜率必須大於商品邊際效用$\phi_x(x;M-px)$曲線的斜率，內部解(全部不買或將預算或現金全部用罄)才會出現。此圖形在後文中會加以繪製。

對消費者均衡式，做比較靜態分析，可得需求函數為：

$$(37) \qquad x = x(p,M); \quad x_M \gtrless 0,\, x_p \gtrless 0$$

其中，

(38) $$x_M = \frac{\psi_m^p - \phi_{xm}}{\phi_{xx} - p\phi_{xm} - p\psi_x^p + p\psi_m^p} \gtrless 0$$

(39) $$x_p = \frac{\psi_p^p - x(\psi_m^p - \phi_{xm})}{\phi_{xx} - p\phi_{xm} - p\psi_x^p + p\psi_m^p} \gtrless 0$$

所得(M)變動對需求量(x)的結果為 $x_M \gtrless 0$，這表示人們所得提高時對某商品的購買數量可以是增加、可以是減少、也可以是維持不變。此分析結果顯示所得或預算增加對商品需求數量的影響方向，可拆解為等號右邊的兩個分項所表示的兩種不同的心理運作效果，我們可以稱為「所得變動的價格效用效果」與「所得變動的商品邊際效用的效果」。前者表示消費者所保有的現金或財富愈多價格的效用愈低。因為當消費者愈有錢時，付出相同金錢 px 後，所剩餘的錢財 $M-px$ 愈多，消費者所保有的現金或財富愈多，購買第 x 單位商品的價格的效用 $\psi^p(p;M-px)$ 愈低，所付出的相同的價錢所帶來的痛苦感較低，在商品的邊際效用遞減的情況下，願意在相同的價格下購買更多的數量。後者「所得變動的商品邊際效用的效果」就是反映由心理定義下此商品對消費者而言是「正常品、中立品、劣等品」的效果，我們簡稱為「劣等品效果」，即有時以「劣等品效果」來統稱「正常品、中立品、劣等品」等三種不同的效果。隨著消費者所得的提高，不同的人可能會依據其成長經驗或價值觀，而改變其對不同商品的邊際評價，這種變化就反映在「所得變動對商品邊際效用的評價的變化上」，而這會進一步影響消費者對此商品的購買行為。進一步更詳細的解釋可參考林忠正(2016)編號第 17 號的文章〈劣等品、正常品與中立品的新經濟學理論：分析所得變動的需求效果〉中的相關經濟意義的詮釋。

另外，價格(p)變動對需求量(x)的影響為 $x_p \gtrless 0$，這說明商品價格愈高，人們對某商品的購買數量可以是增加、可以是減少、也可以是維持不變。在此模型中，價格變動的總效果可以分解成相同的影響管道，我們利用下一節的篇幅來加以說明這背後的經濟直覺。

5. 「純粹價格效果」、「所得-價格效果」與「正常品與劣等品效果」

在 Slutsky-Hicks 的序數總效用分析法或無異曲線分析法之下，經濟學家已經很熟悉的一些知名概念是：價格變化對需求量影響的總效果，可以拆解為替代效果與所得效果。替代效果是在原來的無異曲線之下純粹由相對價格變化所引起的需求數量的變化，所得效果則是總效果減掉替代效果的殘差值，也就是在相對價格不變之下純粹因所得變動所

引起的需求數量的變化。由於序數總效用理論總是要求無異曲線必須凸向原點才會有內部均衡解，或邊際替代率必須遞減，所以自身價格變動的替代效果一定是負值，而所得效果則可正、可負、可零。

在新的交易理論的序數邊際效用分析法中，也會出現類似但不同的概念，事實上，是會出現更豐富的概念。我們隨著模型設計的複雜化，將會逐漸呈現與說明其豐富性與差異性。[2]

在此模型，由於價格變動，不只會影響「購買第 x 單位商品所支出的 p 元的價格邊際效用 $\psi^p(p;x,M-px)$ 」，還會影響「代表消費此商品第 x 單位商品的邊際效用 $\phi_x(x;M-px)$ 」。簡單地說，價格變動在此模型中會引發三種可以明確區隔的效果，這三個效果在效用函數進行正向單調轉換之後相關性質還是會維持恆定不變，所以說這三種效果的區分是屬於序數效用的區分概念。

首先，價格變動對 $\psi^p(p;x,M-px)$ 的影響，可明顯分成兩個管道。一是在固定的保有的現金或所得 $M-px$ 下，純粹因價格 p 變動直接所產生的需求量變動效果，我們依據其影響管道稱此效果是「純粹價格效果」。二是價格 p 變動透過消費後的剩餘所得 $M-px$ 的變動，所間接導致的需求數量變動的效果，我們依據其作用方式稱此效果是「所得價格效果」或簡稱「所得效果」。

第一個效果是「純粹價格效果」，第二個效果為「所得價格效果」。由購買數量來看，這兩項效果在此模型中都是負向的，也就是當商品價格提升都會減少商品的購買數量。

這兩項效果可分別表示與解釋如下。

第一，價格(p)變動對需求量(x)的「純粹價格效果」是：

(40) $$x_p\Big|_{p.e.}=\frac{\psi_p^p}{\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_x^p+p\psi_m^p}<0$$

因為在上式中，分母為負，而分子為正，價格變動的「純粹價格效果」為負。這表示商

[2]例如，舊理論的所得效果在基本模型中包含兩項二次微分項，但這兩個不同的分項在其理論中不能有經濟意義，所以只能籠統地將兩項不同的效果合稱為所得效果；然而，在新理論中因為這兩個不同的二次微分項有明確的經濟意義，所以可以將它們分別賦予不同的各自的明確名稱。

品價格提高，價格的效用 $\psi^p(p;x,M-px)$ 愈大，即人們購買第 x 單位商品所犧牲的價值愈大，所以會減少採買數量。

第二，價格(p)變動對需求量(x)的「所得效果」：

(41) $$x_p\big|_{i.p.e.}=\frac{-x\psi_m^p}{\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_x^p+p\psi_m^p}<0$$

因為在上式中，分母為負，而分子為正，價格變動的「所得-價格效果」為負。這說明商品價格提高，消費者在相同的購買數量之下所付出的金錢愈多，所剩餘的錢財愈少，價格的效用 $\psi^p(p;x,M-px)$ 愈高，人們購買第 x 單位商品所產生的負面感受愈大，因此會減少購買數量。

另外，價格變動也會透過消費後的剩餘所得 $M-px$ 影響「代表消費此商品第 x 單位的邊際效用 $\phi_x(x;M-px)$ 」。在新理論中，我們稱當所得提高商品邊際效用會增加的商品為正常品；所得提高商品邊際效用會減少的商品為劣等品；所得提高商品邊際效用維持不變的商品為中立品。接著，價格變動對正常品的購買數量的影響效果，我們就稱為價格變動的「正常品效果」；價格變動對劣等品的購買數量的影響效果，我們就稱為價格變動的「劣等品效果」；價格變動對中立品的購買數量的影響效果，我們就稱為價格變動的「中立品效果」。我們為了敘述方便起見，通稱或簡稱其為價格變動的「正常品或劣等品效果」。

由比較靜態分析的結果，可以很清楚地看到，價格(p)變動對需求量(x)的「正常品或劣等品效果」：

(42) $$x_p\big|_{i.p.e.}=\frac{\phi_{xm}}{\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_x^p+p\psi_m^p}x\underset{<}{\overset{\geq}{}}0\Leftrightarrow\phi_{xm}\underset{>}{\overset{\leq}{}}0$$

此效果可正、可負、可為零。當其效果為負值時，我們就稱為「正常品效果」($\phi_{xm}>0$)；當其效果為正值時，我們就稱為「劣等品效果」($\phi_{xm}<0$)；當其效果為零時，我們就稱為「中立品效果」($\phi_{xm}=0$)。

「正常品效果」的經濟意義是，當商品價格提高時，消費者在相同的購買數量之下所付出的金錢愈多，所剩餘的錢財愈少，商品的邊際效用 $\phi_x(x;M-px)$ 因為商品為正常

品而愈低，人們因此會減少購買數量。「劣等品效果」的經濟意義是，當商品價格提高時，消費者在相同的購買數量之下所付出的金錢愈多，所剩餘的錢財愈少，商品的邊際效用 $\phi_x(x;M-px)$ 因為商品為劣等品而愈高，人們因此會增加購買數量。「中立品效果」的經濟意義是，當商品價格提高時，消費者在相同的購買數量之下所付出的金錢愈多，所剩餘的錢財愈少，商品的邊際效用 $\phi_x(x;M-px)$ 因為商品為中立品而維持不變，人們因此不會改變購買數量。

統合上述的三項效果，可得價格(p)變動對需求量(x)的總效果為：

(43)
$$x_p = \frac{\psi_p^p}{\phi_{xx} - p\phi_{xm} - p\psi_x^p + p\psi_m^p} - \frac{\psi_m^p}{\phi_{xx} - p\phi_{xm} - p\psi_x^p + p\psi_m^p} x + \frac{\phi_{xm}}{\phi_{xx} - p\phi_{xm} - p\psi_x^p + p\psi_m^p} x \gtrless 0$$

價格變動的總效果包括「純粹價格效果」、「所得-價格效果」、以及「正常品或劣等品效果」。因為價格變動的「純粹價格效果」與「所得-價格效果」皆為負，而「正常品或劣等品效果」可正可負，所以價格變動的總效果也是可正可負。

6. 單調轉換

序數總效用分析法高舉正向單調轉換不會改變偏好(與行為)的特性，但必須犧牲效用函數二次微分項的經濟意義。邊際效用分析方法假設人由邊際效用出發(而非由總效用出發)直接來思考問題，不只不會改變消費者行為，而且也不需要犧牲邊際效用的一次微分項(等同於舊理論總效用的二次微分項)的經濟意義。證明如下。

對商品邊際效用 $\phi_x(x;M-px)$ 透過單調函數 $F(\cdot); F'>0$ 進行轉換而成為 $\Phi_x(x;m)=F(\phi_x(x;m))$ ；同時對 p 元的價格效用 $\psi^p(p;x,M-px)$ 做同樣的單調轉換而成為 $\Psi^p(p;x,m)=F(\psi^p(p;x,m))$ ，即：

(44) $$\Phi_x(x;m)=F(\phi_x(x;m));\quad F'>0,\ F''\gtrless 0$$

(45) $$\Psi^p(p;x,m)=F(\psi^p(p;x,m))$$

這隱含：

(46) $\Phi_{xx}(x;m)=F'\phi_{xx}(x;m) \Leftrightarrow sign\phi_{xx}=sign\Phi_{xx}$

(47) $\Phi_{xm}(x;m)=F'\phi_{xm}(x;m) \Leftrightarrow sign\phi_{xm}=sign\Phi_{xm}$

(48) $\Psi_p^p(p;x,m)=F'\psi_p^p(p;x,m) \Leftrightarrow sign\psi_p^p=sign\Psi_p^p$

(49) $\Psi_x^p(p;x,m)=F'\psi_x^p(p;x,m) \Leftrightarrow sign\psi_x^p=sign\Psi_x^p$

(50) $\Psi_m^p(p;x,m)=F'\psi_m^p(p;x,m) \Leftrightarrow sign\psi_m^p=sign\Psi_m^p$

因此，$sign\phi_{ij}=sign\Phi_{ij}$ 且 $sign\psi_i^p=sign\Psi_i^p$，所以邊際效用的變化方向的正負都能維持恆定，因此可以賦予真實的適當的經濟意義。例如，邊際效用遞減在此模型中是序數效用概念，而非如在極大化總效用理論中是基數效用的代名詞或同義詞。

換句話說，在林忠正的序數的邊際效用分析法中，單調轉換後不會改變序數邊際效用交叉項的正負，因為：

(51a) $\phi_{xm}>0 \Leftrightarrow \Phi_{xm}>0 \Leftrightarrow$ x 商品是正常品

(51b) $\phi_{xm}=0 \Leftrightarrow \Phi_{xm}=0 \Leftrightarrow$ x 商品是中立品

(51c) $\phi_{xm}<0 \Leftrightarrow \Phi_{xm}<0 \Leftrightarrow$ x 商品是劣等品

也就是，在新的序數的邊際效用分析架構之中，我們名正言順地可以採取「所得提高商品邊際效用降低為劣等品，所得提高商品邊際效用增加為正常品，所得提高商品邊際效用維持不變為中立品」的心理定義。我們不再需要為了要引進效用只能排序的序數效用概念，而必須如序數總效用理論的無異曲線分析法一樣，被迫放棄很多正常的心理概念，而變成一種單腳、單眼、或單手的殘缺理論。

單調轉換後的消費者均衡要求：

(52) $F(\phi_x(x;M-px))=F(\psi^p(p;x,M-px))$

首先，原均衡條件為 $\phi_x(x;M-px)=\psi^p(p;x,M-px)$，將 $F(\phi_x)$ 取代其中的 ϕ_x，將 $\psi^p(p)$ 以 $F(\psi^p)$ 來取代，可得新的均衡條件 $F(\phi_x)=F(\psi^p)$。從而，正向單調轉換前後的最適條件與最適解不變。

另外，內部解的安定條件要求：

$$\begin{aligned}&\Phi_{xx}-p\Phi_{xm}<p\Psi_x^p-p\Psi_m^p \Leftrightarrow F'\phi_{xx}-F'p\phi_{xm}<F'p\psi_x^p-F'p\psi_m^p\\&\Leftrightarrow \phi_{xx}-p\phi_{xm}<p\psi_x^p-p\psi_m^p\end{aligned} \tag{53}$$

所以單調轉換前後內部解的安定條件不變。

其次，所得變動對購買數量的效果為：

$$\begin{aligned}x_M&=\frac{\Psi_m^p-\Phi_{xm}}{\Phi_{xx}-p\Phi_{xm}-p\Psi_x^p+p\Psi_m^p}\\&=\frac{F'\psi_m^p-F'\phi_{xm}}{F'\phi_{xx}-F'p\phi_{xm}-F'p\psi_x^p+F'p\psi_m^p}=\frac{\psi_m^p-\phi_{xm}}{\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_x^p+p\psi_m^p}\end{aligned} \tag{54}$$

此式與單調轉換前的結果相同。

另外，價格變動對購買數量的效果為：

$$\begin{aligned}x_p&=\frac{\Psi_p^p-x(\Psi_m^p-\Phi_{xm})}{\Phi_{xx}-p\Phi_{xm}-p\Psi_x^p+p\Psi_m^p}=\frac{F'\psi_p^p-F'x(\psi_m^p-\phi_{xm})}{F'\phi_{xx}-F'p\phi_{xm}-F'p\psi_x^p+F'p\psi_m^p}\\&=\frac{\psi_p^p-x(\psi_m^p-\phi_{xm})}{\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_x^p+p\psi_m^p}\end{aligned} \tag{55}$$

此式與單調轉換前的結果相同。因此對邊際效用函數進行正向單調轉換不影響價格變動的比較靜態分析結果，並且也不會影響總效果中三分項的個別效果(純粹價格效果、所得效果、以及正常品與劣等品效果)。因為：

$$\frac{\Psi_p^p}{\Phi_{xx}-p\Phi_{xm}-p\Psi_x^p+p\Psi_m^p}=\frac{F'\psi_p^p}{(\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_x^p+p\psi_m^p)F'}=\frac{\psi_p^p}{\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_x^p+p\psi_m^p} \tag{56a}$$

(56b) $$\frac{x\Psi_m^p}{\Phi_{xx}-p\Phi_{xm}-p\Psi_x^p+p\Psi_m^p}=\frac{F'x\psi_m^p}{(\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_x^p+p\psi_m^p)F'}=\frac{x\psi_m^p}{\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_x^p+p\psi_m^p}$$

(56c) $$\frac{x\Phi_{xm}}{\Phi_{xx}-p\Phi_{xm}-p\Psi_x^p+p\Psi_m^p}=\frac{F'x\phi_{xm}}{(\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_x^p+p\psi_m^p)F'}=\frac{x\phi_{xm}}{\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_x^p+p\psi_m^p}$$

從而對任何一相同問題而言，序數總效用分析法都存在總效用二次微分項沒有意義的缺點，而序數邊際效用分析法對此缺點免疫。要注意我們的結論是非常具有一般性的，此結論隱含對任何一個相關問題而言，新模型都是比較好的模型。

7. Slutsky equation 與新的價格變動的方程式的比較

在 Pareto-Slutsky-Hicks-Allen 的序數總效用分析法或無異曲線分析法之下，經濟學家已經很熟悉的一些知名概念是：價格變化對需求量影響的總效果，可以拆解為替代效果與所得效果。替代效果是在原來的無異曲線之下純粹由相對價格變化所引起的需求數量的變化，所得效果則是總效果減掉替代效果的殘差值，也就是在相對價格不變之下純粹因所得變動所引起的需求數量的變化。

首先，Slutsky equation 的價格變動的方程式為：

(57) $$x_p=\frac{V_m}{J}+x\frac{V_{xm}-pV_{mm}}{J}=\frac{U_m}{H}+x\frac{U_{xm}-pU_{mm}}{H}$$

(58) $$m_p=-\frac{V_x}{J}+x\frac{pV_{xm}-V_{xx}}{J}=-\frac{U_x}{H}+x\frac{pU_{xm}-U_{xx}}{H}$$

其中，$H=U_{xx}-2pU_{xm}+p^2U_{mm}<0$。

其次，新的方程式的價格變動的方程式為：

(59) $$x_p=\frac{\psi_p^p-x(\psi_m^p-\phi_{xm})}{\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_x^p+p\psi_m^p}\gtrless 0$$

$$(60)\qquad \begin{aligned} m_p &= \frac{-p\psi_p^p + xp\psi_x^p - x\phi_{xx}}{\phi_{xx} - p\phi_{xm} - p\psi_x^p + p\psi_m^p} \\ &= \frac{-p\psi_p^p}{\phi_{xx} - p\phi_{xm} - p\psi_x^p + p\psi_m^p} + x\frac{p\psi_x^p - \phi_{xx}}{\phi_{xx} - p\phi_{xm} - p\psi_x^p + p\psi_m^p} \end{aligned}$$

接著，我們要問一些問題來做進一步的比較與理解。首先，我們要問的第一個問題是哪一條方程式的一般性比較強，Slutsky equation 或者是 Lin equation 呢？第二，也就是，在什麼條件之下，兩條方程式可以被證明在外表上(數學符號)是長得一樣的呢？第三，在相同的方程式的外表之下，兩條方程式的實質內涵與經濟意義是否有所差異呢？

首先，關於 Slutsky equation 與新理論的價格變動的方程式的哪一條方程式比較具有一般性的問題。答案是很清楚的，新理論的價格變動的方程式的一般性比較強，因為觀察與比較以下兩個條件就可清楚呈現。

第一個條件，在新的林忠正等提出的序數的邊際效用分析法中，價格的效用與商品的效用是來自不同的價值觀；而在舊的 Pareto 等提出的無異曲線的序數總效用分析法中，所得或貨幣的效用(對應於新理論的價格效用)與商品的效用是來自相同的價值觀。

第二個條件，在新理論中價格 p 元的效用是 $\psi^p(p;x,m)$ ，也就是整個 p 元是被視為一個整體；而在舊理論中價格 p 元的效用是 $p\lambda_m(x,m) = pU_m(x,m)$ ，即價格 p 元的效用是等於 p 個一元乘以每一塊錢的(平均)邊際效用，也就是舊理論假設價格 p 元的每一塊錢的邊際效用都相等。這在價格不高如 10 元時，可能相當合理，但在價格為 100 萬或 20,000 萬等情況下，這樣的假設顯得很不切實際。

綜合而言，新理論不只在設定上顯得更合理，也比較具有一般性。

其次，關於在什麼條件之下，兩條方程式可以被證明在外表上(數學符號)是長得一樣的問題，其答案其實就出現在上一個問題的答案之中。也就是在以下兩條件之下，Slutsky equation 與新理論的價格變動的方程式的外表上(數學符號)是長得一樣。

第一個條件，新理論跨界的效用函數的一般化設定，可以非常恰巧地簡化成同一價值觀的效用概念(及背後的偏好概念)，即 $\phi_x(x;m) = U_x(x,m)$ 且 $\psi^p(p;x) = U^p(p;x)$ 。

並且，第二個條件，p 元的效用 $\psi^p(p;x)$ 可以寫成 p 個一塊錢乘以每一塊錢的(平均)

邊際效用 $\psi^{p}(p;x)=U^{p}(p;x)=p\lambda_{m}(x,m)=pU_{m}(x,m)$ 。

在這兩個條件之下，我們可以藉由以下的說明，顯示 Slutsky equation 與新理論的價格變動的方程式的外表上(數學符號)是長得一樣的。

相關變數符號之間的關係，表示如下：

(61) $$\phi_{x}(x;m=M-px)=U_{x}(x,m=M-px)\Rightarrow\phi_{xx}=U_{xx}$$

(62) $$\phi_{x}(x;m=M-px)=U_{x}(x,m=M-px)\Rightarrow\phi_{xm}=U_{xm}$$

(63) $$\psi^{p}(p;x,m=M-px)=pU_{m}(x,m=M-px)\Rightarrow\psi_{p}^{p}=U_{m}$$

(64) $$\psi^{p}(p;x,m=M-px)=pU_{m}(x,m=M-px)\Rightarrow\psi_{x}^{p}=pU_{mx}$$

(65) $$\psi^{p}(p;x,m=M-px)=pU_{m}(x,m=M-px)\Rightarrow\psi_{m}^{p}=pU_{mm}$$

接著，我們可以看到兩條方程式的分子部分的關係式會相等：

(66) $$\psi_{p}^{p}+x(\phi_{xm}-\psi_{m}^{p})=U_{m}+xU_{xm}-xpU_{mm}$$

因為，

(67) $$\psi_{p}^{p}=U_{m}$$

(68) $$x(\phi_{xm}-\psi_{m}^{p})=x(U_{xm}-pU_{mm})$$

分母部分的關係式也會相等，因為：

(69) $$\phi_{xx}-p\phi_{xm}-p\psi_{x}^{p}+p\psi_{m}^{p}=U_{xx}-pU_{xm}-pU_{mx}+p^{2}U_{mm}=U_{xx}-2pU_{xm}+p^{2}U_{mm}$$

最後，第三點，關於在相同的方程式的外表之下，兩條方程式的實質內涵與經濟意義是否有所差異的問題，我們可以簡單介紹其中一些差異。(有不少不熟悉此新理論的人，總是會提問一個很典型的問題：新舊理論會出現怎樣的不同的分析結果？關於這個

問題，熟悉此新理論的人可能很傾向於說：很多、很多、很難說盡，或應該說可能說不盡。但也因為很難說盡，所以，我們只好在分析一個一個不同的問題時，再一個一個地盡量地加以慢慢述說。)

我們就對兩種新舊理論做進一步比較如下，以彰顯在相同的外表之下，新舊理論的一些實質內涵的不同。

第一，舊理論是由總效用出發的理論，新理論是由邊際效用出發的理論。

第二，在舊理論中總效用只能分成兩種效果(替代效果和所得效果)，而在新理論中總效用分成三種效果(純粹價格效果、所得價格效果、以及正常品或劣等品效果)，所以新理論的經濟意義的內涵比較豐富。

第三，舊理論是一種黑箱理論，所得效果涵蓋兩項的心理意義，但因為總效用的二次微分項正負符號不能被賦予經濟意義，所以是一種不能進行任何心理意義詮釋的黑箱理論。而新理論是一種序數的邊際效用理論，邊際效用的變化方向的正負符號可以維持恆定，所以可以賦予經濟意義的詮釋，不是一種心理上的黑箱理論。從這一角度來看，新理論還是優於舊理論。

第四，由於舊理論是一種心理上的黑箱理論，所以我們可以稱它為單眼理論、單腳理論、單手理論；而新理論沒有這項缺失，所以新理論是一種正常的雙眼理論、雙腳理論、雙手理論。

第五，在舊理論中假設人們對金錢與商品的價值觀是統合在單一價值觀中，而在新理論中假設人們對金錢與商品的價值觀不需要已先被統合在單一價值觀之中。所以，新理論是一種跨越價值觀的比較的理論，而舊理論是一種統合在單一價值觀之下的理論。

第六，在舊理論中，p 元被看成 p 個一塊錢，有每一塊錢的(平均)邊際效用的概念；在新理論中，p 元被看成一單位，沒有每一塊錢的(平均)邊際效用的概念。

第七，在舊理論中，替代效果一定要為負值，因為無異曲線必須凸向原點；在新理論中，純粹價格效果可以為正值，也可以為負值，也可以為零。因為內部解所要求的條件已經不再是無異曲線必須凸向原點的條件。在這個觀點來看，新理論的解釋與論事能力也優於舊理論。

第八，在舊理論中，交叉邊際效用項必須要有對稱性(數值必須相等)，但在新理論中，容許交叉邊際效用項不需要有對稱性(即不只數值不必須相等，連正負都可以不同)。在這個觀點來看，新理論的解釋世事的能力也優於舊理論。

第九，舊理論邊際效用的變化方向的正負不能有經濟意義，連帶地，全部常識性的心理概念都不能用，詳見林忠正(2016，第 18 號論文)《不自然的理論:「預算限制下極大化商品總效用模型」的分配理論本質》的說明。

第十，在舊理論中，邊際替代率等於相對價格，這表示人們對用在不同商品上的每一塊錢的看法或效用都是一樣的。在新理論中，邊際替代率不等於相對價格，這表示人們對用在不同商品上的每一塊錢的看法或效用可以是不一樣的。

第十一，在舊理論中，消費者必須求取一階與二階條件的不自然的動作，在新理論中無此問題或缺點。

第十二，在舊理論之中，消費者要會微積分;在新理論中，消費者不需要會微積分。

結論是，新理論到處優於舊理論， 舊理論是從第一個假設開始就錯了。

8. 結語

Lenfant (2006)發表於《政治經濟史》(*History of Political Economy*)的〈互補性和需求理論：從 20 世紀 20 年代至 40 年代〉(Complementarity and demand theory: From the 1920s to the 1940s)的經濟史論文的破題:「消費需求理論的歷史通常被看作是從簡單的馬歇爾設計轉變至功能強大的希克斯形式的需求理論的表述方式。曾經，有人這樣說，馬歇爾形式的『需求法則』遇到序數主義的原則,通過序數原則逐步將馬歇爾形式的『需求法則』改造成具有現代科學所有屬性的一個美麗的需求理論。」

本文分析的結果,暗示或明示地告訴我們,因為我們已經找到一種有兩種舊效用理論優點而無其缺點的新效用理論,所以需求理論必須再次重建,或許以後有一天有經濟史學家會改寫上述的段落為:「消費需求理論後來的歷史發展，通常被看作是從不切實際的希克斯形式的需求理論的表述方式重新回復到獲得合理的跨價值觀的偏好排序概念的靈藥而重生的簡單的合乎直覺的馬歇爾設計。曾經,有人這樣說,馬歇爾形式的『需

求法則』因為遇到跨界的序數邊際效用主義的原則而重生，通過跨界的序數邊際效用主義的原則逐步將馬歇爾形式的『需求法則』改造成具有現代科學所有屬性的一個美麗的需求理論。」

Reference

邢慕寰譯，(1967)，《價值與資本》(*Value and Capital*)，台北市：台灣銀行經濟研究室。

Hicks, J.R. (1939) *Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*, Oxford: Clarendon Press.

Lenfant, J.S. (2006) "Complementarity and Demand theory: From the 1920s to the 1940s," *History of Political Economy*, 38, pp. 48-85.

Schultz, H. (1935) "Interrelations of Demand, Price, and Income," *The Journal of Political Economy*, 43:4, pp. 433-481.

邁向需求理論的再次重建之路的系列論文

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色：難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(I)：效用極大化的 Marshall 模型與無意義的邊際效用遞減法則〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(II)：Marshall 的「邊際需求價格」模型與古典效用可衡量概念的意義〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈為 Marshall 需求理論編寫一冊返回經濟學舞台的劇本： 比較商品效用與價格效用的邊際摸索決策方式的 Marshall 模型〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法：完成序數效用革命理論的誕生〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈經濟學新的跨界十字交叉(A New Cross-Cross)圖形：取代無異曲線圖示的跨界序數邊際效用分析法的新圖示〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數效用革命的頭號戰犯：序數主義者眼中邏輯謬誤的常識性邊際效用互補性定義〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈為什麼我們需要一個純正的立基心理法則的序數互補性理論？：難覓古典的 ALEP 互補性定義的完美分身〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」：在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈錯把馮京當馬涼：當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形 I：等序數邊際效用曲線〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形 II：序數邊際效用曲線〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2016)，〈連劣等品都不能妥善解釋的現代個體理論不要也罷：你不可以說「所得提高我對某一商品的邊際效用提高了」〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2016)，〈黑箱理論：序數總效用理論的劣等品理論〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2016)，〈劣等品、正常品與中立品的新經濟學理論：分析所得變動的需求效果〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2016)，〈不自然的理論：「預算限制下極大化商品總效用模型」的分配理論本質〉，台灣經濟學會研討論文。