黑箱理論

序數總效用理論的劣等品理論

林忠正*
中央研究院經濟所研究員
國立政治大學財政系教授
國立交通大學經營管理研究所教授
台北市南港區(115-41)研究院路 2 段 128 號
中央研究院經濟所
電話: 886-2-2782-2791 轉 507
電子信箱: cclin@econ.sinica.edu.tw

開始撰稿：2015年12月31日
完稿時間：2016年1月22日
列印時間：2016年4月14日

我是一位跨價值觀的序數邊際效用主義者，你呢？

*謝謝林曉珮助理非常有效率的協助，也很謝謝政大財政研究所所江若妘同學的細心校稿。

黑箱理論

序數總效用理論的劣等品理論

[摘要] 這篇文章先後利用兩種商品與多種商品兩種消費者在預算限制下追求序數總效用極大化的模型，藉此說明此理論必須放棄「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的心理定義」而採取「以所得提高需求數量減少的商品為劣等品的市場定義」的作為，將會使此理論或分析架構變成是一種「黑箱理論」。這是因為在進行所得變動對需求數量影響的比較靜態分析時，必須用到總效用二次微分項的概念，但卻因為在序數總效用理論中二次微分項的正負不能有意義的核心概念下，只能對總效用二次微分項正負的內涵故意視而不見，這導致經濟學家如置身於在黑暗之中不知如何解釋所得變動如何影響消費者需求數量變動的晦暗不明的「黑箱理論」。這種「黑箱理論」是很怪異的理論，但卻是千真萬確地現身於現代主流的經濟理論中，這彰顯現代的經濟理論可能是一套「從根開始」就是錯誤的理論，並且一套建立在序數效用概念的合宜的個體選擇理論事實上還未現身，或許我們可以說：經濟學效用概念下的個體選擇理論學家中的牛頓還未出現。

JEL 分類：B130, D110

因為一個(序數總效用理論)的邊際效用變化方向不能有意義，一個(個體經濟決策比較靜態分析的基本核心性質)必須用到邊際效用的變化方向，這兩者是先天地不搭調的。但在現代主流的個體理論中被勉強搭配在一起，這是一項具有先天侷限性的搭配，這也創造了一種先天上有嚴重缺陷的理論。

或許，我們可以稱現代主流的「在預算限制式下極大化序數總效用的分析架構」，如 Bernardelli (1934)所言的是一種不得不砍斷一隻腳的「單腳理論」，看看只剩一隻腳在理論的路上可以走得多好多平穩；或者，我們也可以說，是一種不得不砍斷一隻手的「單手理論」，看看只剩下一隻手在理論的路上可以把事情做得多好多靈活；或是一種不得不放棄一隻眼睛的「獨眼理論」，看看只剩一隻眼睛在理論的路上可以看得多清楚多深入。其關鍵原因，就在現代主流的「在預算限制下極大化序數總效用的分析架構」必須放棄邊際效用變化方向正負的心理的經濟意義，這理論必須把正常的心理思維、程序與內涵全部驅離出理論框架中，這是一種無心的理論、或一種只有市場觀察，而沒有心的「空心理論」，是一種只是能觀察到「一個刺激一個反應」而不知道為何會導致如此反應的理論，因此我們稱它是一種類似於二十世紀初期的心理學者 John Watson (1930)鼓吹的行為主義的黑箱理論樣，只是一種經濟學裡的「黑箱理論」。

1. 不得不放棄心理內涵詮釋權的黑箱理論

台灣 2014 年 3 月爆發「太陽花學運」，這場政治性質的學生運動的直接導火線，肇因於年輕學生們憤怒於「黑箱談判」所衍生的「黑箱服貿」協定。[1]

這篇文章要說明現代主流的經濟學個體選擇理論是一種「黑箱」理論，因此，我們經濟學界也需要一次打破黑箱朝向光明的經濟學「太陽革命」。

在這篇文章中我將藉由關於劣等品定義的討論，論述源於 Pareto、Slutsky、Allen、Hicks、以及 Samuelson 等經濟學大師所創造與推廣的現代主流「在預算限制下極大化序數總效用的分析架構」是一種「黑箱理論」。這問題的根源在於，序數總效用理論先天的基本特性不能與個體經濟決策比較靜態分析的基本核心性質共存共榮。

首先，序數總效用理論先天的基本特性，反映在序數效用的「第一個假設」之上。序數效用理論的「第一個假設」是經濟個體有能力對不同的選項組合進行偏好或效用數值大小的排序。一個序數效用函數經過任何正向單調轉換後，所對應的新函數還是可以維持或代表原來的偏好次序。但單調轉換前後不同的效用函數所各自對應的總效用的二次導數(總效用的二次微分項)的正負符號無法維持恆定不變，變成一個難以掌握的捉摸不定的虛幻概念，所以無法提供建立於總效用二次微分項正負的「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」在序數效用理論所搭設的舞台中有任何現身演出的機會。

其次，個體經濟決策比較靜態分析的基本核心性質，反映於經濟決策的最適化邊際條件上。經濟決策的最適化邊際條件是指消費者將有限的資源用於不同的選項時，其最適化的必要條件是消費者由最後的資源分配狀態必須滿足某種邊際值或比率相等的條件，例如花用在每一個選項(商品)上最後一塊錢所獲得的邊際效用必須相等；否則藉由將資源由產生較低的邊際效用的選項移至產生較高邊際效用的選項，就可以提高消費者的福利。但是，在經濟學分析中邊際效用相等的最適化條件，就如在音樂的領域中，只是對應於我們已經擁有一台鋼琴或一把小提琴，但還沒有能力演奏出動人的音樂旋律，在經濟學的理論中要演奏出音樂旋律必須要進行比較靜態分析。這是因為最適化條件必

[1] 你知道在經濟學界曾經發生所謂的經濟學學生運動嗎？恐怕不只您沒有聽說過，即使經濟學的學生運動早已在國際經濟學界掀起陣陣漣漪，但連我認識的很多優秀的台灣經濟學家都從來沒有聽說過。有興趣的人可參考發表於《民報》的文章：林忠正(2014)〈法國經濟學的學生運動〉與林忠正(2014)〈與學生站在同一陣線的法國經濟學教授的聲援：法國經濟學教授的請願書〉。

須用到邊際效用的概念，而邊際效用是非常主觀而且是不可衡量的觀念。我們無法運用最適化條件主張或計算出消費者真正會購買的商品數量，因此效用極大化的模型要提供有意義的經濟分析預測與解釋，必須做比較靜態分析，來預測與解釋模型外生變數的變動會導致模型的內生變數如何變動(主要是指變動的方向而非指變動數值的大小)。而由表現於邊際效用的最適化條件進行比較靜態分析，就是對最適化條件利用微分或全微分的概念進行分析，藉由微分分析所獲得的比較靜態分析結果的數學變數符號中，則會出現邊際效用的變化率或變化方向等數學變數，也就是會出現總效用的二次微分項正負的概念。

論述至此，我們就可以清楚地意識到：為何序數總效用理論的基本先天特性不能與個體經濟決策分析架構的基本核心性質共存共榮的基本癥結所在了。

因為一個(序數總效用理論)的邊際效用變化方向不能有意義，一個(個體經濟決策比較靜態分析的基本核心性質)必須用到邊際效用的變化方向，這兩者是先天地不搭調的。但在現代主流的個體理論中被勉強搭配在一起，這是一項具有先天侷限性的搭配，這也創造了一種先天上有嚴重缺陷的理論。

或許，我們可以稱現代主流的「在預算限制式下極大化序數總效用的分析架構」，如 Bernardelli (1934)所言的是一種不得不砍斷一隻腳的「單腳理論」，看看只剩一隻腳在理論的路上可以走得多好多平穩；或者，我們也可以說，是一種不得不砍斷一隻手的「單手理論」，看看只剩下一隻手在理論的路上可以把事情做得多好多靈活；或是一種不得不放棄一隻眼睛的「獨眼理論」，看看只剩一隻眼睛在理論的路上可以看得多清楚多深入。其關鍵原因，就在現代主流的「在預算限制下極大化序數總效用的分析架構」必須放棄邊際效用變化方向正負的心理的經濟意義，這理論必須把正常的心理思維、程序與內涵全部驅離出理論框架中，這是一種無心的理論、或一種只有市場觀察，而沒有心的「空心理論」，是一種只是能觀察到「一個刺激一個反應」而不知道為何會導致如此反應的理論，因此我們稱它是一種類似於二十世紀初期的心理學者 John Watson (1930)鼓吹的行為主義的黑箱理論一樣，只是一種經濟學裡的「黑箱理論」。在這篇文章中，我就藉由關於劣等品定義的討論，呈現這種「黑箱理論」的基本特質。

我們先介紹兩種商品的模型，再介紹多種商品的模型。

2. 兩種商品的模型

關於劣等品問題的討論，通常以「預算限制下極大化兩種商品的總效用模型」為分析背景。這個虛擬故事的場景是如此說：假設一位擁有財富或所得水準 M 元的消費者，在面對單位價格是 p 元的 x 商品，以及單位價格是 q 元的 y 商品時，將會思考或面對如何一毛不剩地用盡所有所得或財富以購買 x 與 y 兩種商品的決策情境，並且，將以追求由 x 商品以及 y 商品所組成的總效用 $U(x,y)$ 的極大值的方式進行決策。

2.1 正向單調轉換前 Slutsky-Hicks 的兩種商品消費模型

在這樣虛擬的「消費者在預算限制下極大化總效用」的決策或思維方式下，Slutsky-Hicks 的消費模型設定如下：

(1) $$\max_{x,y} \quad U(x,y);\quad U_x > 0, U_y > 0,\ \ s.t. \quad px + qy = M$$

最適化的一階條件，即無異曲線與既定的預算限制線相切的條件，要求：

(2) $$\frac{U_x(x,y)}{U_y(x,y)} = \frac{p}{q}$$

(3) $$px + qy = M$$

二階條件要求無異曲線凸向原點，即：

(4) $$H = q^2U_{xx} - 2pqU_{xy} + p^2U_{yy} < 0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：

(5) $$x_M = \frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{-H} \gtrless 0$$

(6) $$y_M = \frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{-H} \gtrless 0$$

換句話說，依據上述數學分析結果，初步看來所得變動對 x 商品以及 y 商品購買數量的效果都是可增可減，即 $x_M \gtrless 0$ 和 $y_M \gtrless 0$。但是，值得注意的是，在兩種商品的模型下，

所得增加時至少要有一種商品的購買數量必須增加，否則所得不能全數用罄。這是以這種分析模型來看世界時，這虛擬世界所必須呈現的樣貌。

在現代個體選擇理論中，常稱呈現$x_M > 0$和$y_M > 0$的購買行為的商品為此消費者從所得的角度來看的正常品(normal goods)；常稱呈現$x_M = 0$和$y_M = 0$的購買行為的商品為此消費者從所得的角度來看的中立品(neutral goods)；常稱呈現$x_M < 0$和$y_M < 0$的購買行為的商品為此消費者從所得的角度來看的劣等品(inferior goods)。

接下來，很自然地，我們會很好奇且很想要探究那是什麼原因會導致如$x_M > 0$和$y_M > 0$，或$x_M > 0$和$y_M < 0$的結果。在這樣的好奇與研究動機之下，我們很自然地會想要由上述的分析結果，即方程式(5)和(6)的等號的右邊的數學變數符號，即$qU_{xy} \gtreqless pU_{yy}$與$pU_{xy} \gtreqless qU_{xx}$，以及$U_{xy} \gtreqless 0$、$U_{xx} \gtreqless 0$與$U_{yy} \gtreqless 0$等變數，所背負的經濟意義進行討論。

換句話說，所得變動對購買數量效果的正負取決於以下的條件：

(7) $$sign(x_M) = sign(qU_{xy} - pU_{yy})$$

(8) $$sign(y_M) = sign(pU_{xy} - qU_{xx})$$

也就是，

(9) $$x_M \gtreqless 0 \Leftrightarrow qU_{xy} - pU_{yy} \gtreqless 0 \Leftrightarrow qU_{xy} \gtreqless pU_{yy}$$

(10) $$y_M \gtreqless 0 \Leftrightarrow pU_{xy} - qU_{xx} \gtreqless 0 \Leftrightarrow pU_{xy} \gtreqless qU_{xx}$$

因此，所得變動對商品x購買數量的影響效果的正負($x_M \gtreqless 0$)，取決於$(qU_{xy} - pU_{yy})$的數值的正負，即$qU_{xy} - pU_{yy} \gtreqless 0$，這進一步等價於$qU_{xy} \gtreqless pU_{yy}$的條件。所以，我們看到這樣的分析結果，我們會想要由($qU_{xy} - pU_{yy} \gtreqless 0$)整項的正負、或由$qU_{xy} \gtreqless pU_{yy}$的相對大小，來詮釋所得變動對商品$x$購買數量的影響效果的正負($x_M \gtreqless 0$)的經濟意義。並且，我們會有一種很自然的衝動或傾向，在賦予$U_{xy} \gtreqless 0$(商品之間的替代互補關係)與$U_{yy} \gtreqless 0$(商品的邊際效用遞增或遞減)心理與經濟意義的解釋，即$U_{xy} > 0$與$U_{xy} < 0$賦予兩商品之間

分別是替代品與互補品的關係，與將$U_{yy}>0$與$U_{yy}<0$賦予此商品的邊際效用分別是遞增與遞減的意義。也就是藉由立基於個人心理偏好的邊際效用變化方向的特性與商品價格之間的關係，即兩種商品之間的替代與互補關係與商品的邊際效用遞增或遞減的特性，來推敲與解釋消費者的購買行為為何會隨所得的變動而變動的原因。

但是，這麼自然或正常的意圖與想法，可以付之實行嗎？

出人意料之外，或我們可以說，令人無法理解地，非常令人意外地，在現代序數總效用的「預算限制下極大化總效用」的分析架構之下，容許由$qU_{xy}-pU_{yy}\gtrless 0$整項的正負來詮釋$x_M\gtrless 0$的意義，也可以用$qU_{xy}\gtrless pU_{yy}$相對大小來詮釋$x_M\gtrless 0$的意義。但是卻不能容許主張$U_{xy}\gtrless 0$、$U_{xx}\gtrless 0$和$U_{yy}\gtrless 0$是正是負的論述，也就是不能在賦予正的數值或負的數值任何實際經濟意義之下，而對$qU_{xy}\gtrless pU_{yy}$相對大小進行進一步的更詳盡的詮釋。

也就是序數總效用理論畫下一道紅線，不允許任何研究者使用到總效用二次微分項的正負的概念。

這真的會令人感到很困擾，感到無法理解。

如果你真的這樣做，以$qU_{xy}\gtrless pU_{yy}$相對大小來詮釋$x_M\gtrless 0$的意義，或是以$qU_{xy}-pU_{yy}\gtrless 0$整項的正負來詮釋$x_M\gtrless 0$的意義時，提到$U_{xy}$與$U_{yy}$正負的經濟意義，那就表示你經濟學教育背景沒有能夠提供你基本的經濟學素養，因為這樣做是違反個體經濟學的序數總效用的「預算限制下極大化序數總效用」的分析架構的基本精神。

這到底是為什麼呢？

這是因為$U_{xy}\gtrless 0$、$U_{xx}\gtrless 0$和$U_{yy}\gtrless 0$等總效用的二次微分項在現代序數效用理論中，是無意義的且不科學的效用概念。讀過這一系列論文的讀者，應該對背後的原因了然於心了。似乎不需要我在此再次解釋其緣由了，不熟悉的讀者請參考林忠正(2016)〈連劣等品都不能妥善解釋的現代個體理論不要也罷：所得與商品邊際效用不可以存在明確的關聯性〉的文章，或其他此系列的相關論文。在此，為了一些可能沒有讀過此系列相關論文的讀者，我們在此還是不厭其煩地詳加說明。

這是為什麼呢？

我們接著分析正向單調轉換後的消費者選擇模型，然後進一步清楚地說明此問題。

2.2 正向單調轉換後 Slutsky-Hicks 的兩種商品消費模型

正向單調轉換後的 Slutsky-Hicks 消費模型變成：

(11) $$\max_{x,y} \quad V(x,y)=F(U(x,y)); \quad F'>0,\ s.t. \quad px+qy=M\ ,$$

其中，$U(x,y)$ 是原先的總效用函數，而 $V(x,y)$ 為藉由 $F(U)$ 的正向單調轉換後所得到的新的總效用函數。正向單調轉換的特性反映在一階導數為正 $F'(U)>0$ 的設定上。二階導數的正負完全不會影響單調正向轉換不會改變效用數值的大小次序的特性，所以 $F''\gtreqless 0$ 皆可。單調正向轉換前後的總效用數列數據的大小次序相同，$U(x,y)$ 與 $V(x,y)$ 因此代表相同的偏好，這是序數效用理論的基本教條。

正向單調轉換後，無異曲線與既定的預算限制線相切的最適化的一階條件要求：

(12) $$\frac{V_x(x,y)}{V_y(x,y)}=\frac{p}{q}$$

(13) $$px+qy=M$$

二階條件要求無異曲線凸向原點，即：

(14) $$J=q^2V_{xx}-2pqV_{xy}+p^2V_{yy}<0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：

(15) $$x_M=\frac{qV_{xy}-pV_{yy}}{-J}\gtreqless 0$$

(16) $$y_M=\frac{pV_{xy}-qV_{xx}}{-J}\gtreqless 0$$

如前所述，對總效用 $U(x,y)$ 進行正向單調轉換使它變成 $V(x,y)$ ，即：

(17) $$V(x,y)=F(U(x,y)); \quad F'>0$$

這樣的正向單調轉換過程，會衍生出以下的關係式：

(18) $$V_x = F'U_x,\ V_y = F'U_y$$

(19) $$V_{xx} = F'U_{xx} + F''U_xU_x,\ V_{yy} = F'U_{yy} + F''U_yU_y$$

(20) $$V_{xy} = F'U_{xy} + F''U_xU_y,\ V_{yx} = F'U_{yx} + F''U_yU_x$$

因為$F'' \gtreqless 0$皆可，若原總效用函數$U_{xx} < 0$邊際效用遞減，此時，在$F'' > 0$的條件下，則新總效用函數可以$V_{xx} \gtreqless 0$，即新的邊際效用可以是遞減、常數或遞增。換句話說，我們可以獲得$signV_{xx} \neq signU_{xx}$、$signV_{yy} \neq signU_{yy}$的結果，即正向單調轉換前後的總效用函數所對應的純粹二階導數的數值正負符號可能不同。邊際效用遞減與序數效用概念因此是互相排斥的概念。

同理，在此，我們關注的焦點是$signV_{xy} \neq signU_{xy}$、$signV_{yx} \neq signU_{yx}$的結果，即正向單調轉換前後的總效用函數所對應的交叉二階導數的數值正負符號可能不同。「交叉邊際效用正負的互補性定義」與序數效用概念因此彼此是天敵無法共存。

接著，我們證明單調正向轉換前後的分析結果會一樣。首先，單調正向遞增轉換前後的最適化一階條件完全相同，因為：

(21) $$\frac{V_x}{V_y} = \frac{F'U_x}{F'U_y} = \frac{U_x}{U_y} = \frac{p}{q}$$

這表示，在相同的預算限制式之下，單調正向遞增轉換前後的最適化條件不變，即最適解的數值不變。

其次，由無異曲線分析法的基本特性來看，單調正向轉換前後的效用函數表示相同的偏好，所獲得的分析結果**(總結果)**應該一樣才對。所以，我們應該可以證明單調正向轉換前後兩個模型的比較靜態分析的總效果或最後的結果會完全相同。

這證明過程非常簡單，將式(18)-(20)代入式(15)-(16)中，我們的確可以證得它們各自所得變動對購買數量的效果相等，即會與單調轉換前的式(5)-(6)的比較靜態分析結果完全一樣：

(22) $$x_M = \frac{qV_{xy} - pV_{yy}}{-J} = \frac{qU_{xy} - pU_{yy}}{-H}$$

(23) $$y_M = \frac{pV_{xy} - qV_{xx}}{-J} = \frac{pU_{xy} - qU_{xx}}{-H}$$

其中，可證明 $J = q^2V_{xx} - 2pqV_{xy} + p^2V_{yy} = F'H < 0$。

因此我們藉由數學證明可發現總效用函數經過正向單調轉換後，不會影響消費者的均衡條件，也不會影響比較靜態分析的整體的或最後的結果。這就驗證了無異曲線分析法的基本特性，也就是單調正向轉換前後的效用函數，表示相同的個人偏好。既然是代表相同的偏好，因此也應該隱含相同的個人行為。

這一切看起來很完美，序數效用理論看來似乎就足夠建構出合理的消費理論了，因為序數總效用理論可以禁得起正向單調轉換(效用數值只能排序的檢驗標準)的嚴格考驗。邊際效用遞減法則與「交叉邊際效用正負的互補性定義」等總效用二次微分項正負的概念，因此是多餘的、無意義的概念。

2.3 怪異的黑箱理論

只是，你可能會發現雖然單調正向轉換前後的任何兩個模型，所獲得的分析結果(或更精準地說是總效果的分析結果)是一樣的，但是若總效果可分成兩項，你會驚訝地發現這兩分項可能會是不一樣的。這兩分項不只數值的大小可能不一樣，連數值正負方向可能都會不一樣。

這項事實，正好可以利用所得變動的效果來加以說明。因為關於所得變動的總效果中，在單調正向轉換前後兩模型中的互相對應的兩小項的大小關係，分別是以下兩關係式的不等式左右兩邊的分項：

(24) $$\frac{qV_{xy}}{-J} = \frac{qF'U_{xy} + qF''U_xU_y}{-F'H} = \frac{qU_{xy}}{-H} + \frac{qF''U_xU_y}{-F'H} \underset{<}{\geq} \frac{qU_{xy}}{-H}$$

(25) $$\frac{pV_{yy}}{J} = \frac{pF'U_{yy} + pF''U_yU_y}{F'H} = \frac{pU_{yy}}{H} + \frac{pF''U_yU_y}{F'H} \underset{<}{\geq} \frac{pU_{yy}}{H}$$

首先，若 $F''=0$，也就是，若我們接受效用函數是只能進行正向線性轉換的基數效用，則上面的兩關係式等號才會成立。也就是邊際效用遞減法則可以取得容身之所，但是我們一而再且再而三地在這系列論文的前面文章中強調，基數效用理論是一種效用可衡量的很難成立的「無限地不可能的」的「稻草人理論」。

其次，若 $F''=0$ 不成立，單調正向轉換前後，雖然所獲得的總效果一樣，但總效果的兩分項的數值可能會不一樣。其實，不只數值的大小可能會不一樣，連數值正負方向都可能會不一樣。此結果表明這兩分項是不能有實際經濟意義的，否則會在相同的偏好下對應出不同的行為，這麻煩可就大了。進一步說，如果兩個分項具有不同的實際經濟意義，則代表單調正向轉換前後的偏好是不一樣的，這表示必須放棄無異曲線效用數值只有排序大小的意義的核心理論，這當然是避之唯恐不及的事，這當然是不可以被接受的事。所以為了大我必須犧牲小我，也就是為了大局著想，總效果中的兩個分項是不能有實際經濟意義的。但這項特性因此會限制 Slutsky-Hicks 個人選擇模型所能刻劃的故事的豐富度，也限縮了模型的解釋能力與內涵的豐富性。

現在我們已經可以更清楚地說明，上文中所提到的一項令人困惑的問題：

> 出人意料之外，或我們可以說，令人無法理解地，令人意外地，在現代序數總效用的「預算限制下極大化總效用」的分析架構之下，容許由 $qU_{xy}-pU_{yy}\gtrless 0$ 整項的正負來詮釋 $x_M\gtrless 0$ 的意義，也可以用 $qU_{xy}\gtrless pU_{yy}$ 相對大小來詮釋 $x_M\gtrless 0$ 的意義。但是卻不能容許主張 $U_{xy}\gtrless 0$、$U_{xx}\gtrless 0$ 和 $U_{yy}\gtrless 0$ 是正是負的論述，也就是不能在賦予正的數值與負的數值任何實際經濟意義之下，而對 $qU_{xy}\gtrless pU_{yy}$ 相對大小進行進一步的更詳盡的詮釋。

這是因為在序數總效用的理論之下，$(qU_{xy}-pU_{yy})$ 與 $(pU_{xy}-qU_{xx})$ 整項的正負符號是可以在單調轉換前後維持始終相同的，即：

(26) $$sign(x_M)=sign(qU_{xy}-pU_{yy})=sign(qV_{xy}-pV_{yy})$$

(27) $$sign(y_M)=sign(pU_{xy}-qU_{xx})=sign(pV_{xy}-qV_{xx})$$

這證明過程非常簡單，將式(18)-(20)以及式(21)代入上面的兩式即可。為協助讀者閱讀與理解此論述，我還是不厭其煩地將此證明寫在此文章中。其中 $sign(qU_{xy}-pU_{yy})=sign(qV_{xy}-pV_{yy})$ 的證明，報告如下：

(28)
$$qV_{xy}-pV_{yy}=q(F'U_{xy}+F''U_xU_y)-p(F'U_{yy}+F''U_yU_y)$$

$$=qF'U_{xy}+qF''U_xU_y-pF'U_{yy}-pF''U_yU_y$$

$$=qF'U_{xy}-pF'U_{yy}+qF''U_xU_y-pF''U_yU_y$$

$$=(qU_{xy}-pU_{yy})F'+(qU_x-pU_y)F''U_y$$

$$=(qU_{xy}-pU_{yy})F'+qU_y(\frac{U_x}{U_y}-\frac{p}{q})F''U_y=(qU_{xy}-pU_{yy})F'$$

因為 $F'>0$，所以 $sign(qU_{xy}-pU_{yy})=sign(qV_{xy}-pV_{yy})$。

但是在序數總效用的理論之下，qU_{xy} 與 qV_{xy} 的正負符號，以及 pU_{yy} 與 pV_{yy} 的正負符號，在單調轉換前後是無法維持始終相等的，即：

(29)
$$sign(V_{xy})=sign(F'U_{xy}+F''U_xU_y)\neq sign(U_{xy})$$

(30)
$$sign(V_{xx})=sign(F'U_{xx}+F''U_xU_x)\neq sign(U_{xx})$$

(31)
$$sign(V_{yy})=sign(F'U_{yy}+F''U_yU_y)\neq sign(U_{yy})$$

由以上的論述，我們可以深刻地了解，為何序數效用理論必須由理論創建者自己的雙手心甘情願地交出心理意義的解釋權力。而使得「在預算限制式下極大化序數總效用的分析架構」變成一種不得不砍斷一隻腳的「截肢理論」，看看只剩一隻腳在理論的路上可以走得多好；或是一種不得不砍斷一隻手的「單手理論」，看看只剩下一隻手在理論的路上可以把事情做得多好多靈活；或是一種不得不放棄一隻眼睛的「獨眼理論」，看看只剩一隻眼睛在理論的路上可以看得多清楚。

明明得到這些立基於總效用的二次微分項正負的數學分析結果，但就是不能解釋它，而必須克制這種想要進行心理詮釋的衝動或傾向。可見這理論怪怪的，既然已經藉由數學分析得到這些結果，但卻眼睜睜地看它出現在數學方程式中卻不能採用，這是很不自然的理論。

接著，如果我們真的想問為何所得提高有些商品的需求數量會增加，有些會減少，有些會維持不變，原因何在？

序數總效用理論主義者的答案是：就是只能對$(qU_{xy}-pU_{yy})$整項的正負做為一個整體進行解釋，其他完全不知道為什麼。序數總效用理論主義者對這背後的心理原因，完全不能置一詞，反正就是一個刺激一個反應，至於為何會如此反應，不知道，也不能知道，因為一提到原因，就會違反科學的完美理論的基本精神，或只是表示你的經濟學效用理論的概念沒有正確的理解。因此，我們稱消費者在預算限制下追求序數總效用極大的模型是一種名符其實的「黑箱理論」。由序數總效用理論主義者自己親手交出心理意義的解釋權力的序數效用理論，只好走入漆黑的黑箱之中，而使得現代主流的個體理論一直棲身於黑暗之中，只要我們採用在預算限制下極大化序數總效用的理論，就是採用一種讓我們的經濟推理陷於漆黑中的黑箱理論。

了解現代主流的個體選擇理論到這個地步，我們不得不感慨道：這種理論真是怪異！並且，會感到萬分困惑，為什麼經濟學的大學與研究所教育沒有教導我們這些這麼基本而重要的事實。

這種理論真是怪異，這麼怪異的理論，不要也罷！經濟學會這麼怪異，真是令人無法理解；為何成千上萬的經濟學家會用這種理論作為基本的分析架構，應用來分析各式各樣多采多姿的問題，並發表難以盡數的嚴肅的學術論文，這個領域的知識傳遞與教育方式，真是令人無法理解。

3. 另一種單調轉換的證明方式：Silberberg (1978)的解說

為豐富我們的討論內容，我們以 Silberberg (1978)在《經濟學的結構：數學分析》(*The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*)書中對單調轉換所採用的證明與論述方式來討論此問題，以加深讀者對此問題的相關文獻的了解程度。

Silberberg (1978, pp. 240-241)在《經濟學的結構：數學分析》書中，提出對總效用函數進行正向單調轉換後，所得到的新消費者選擇模型所對應的需求函數，將完全無異於單調轉換前的模型所對應的需求函數的【**命題 1**】。並且，提出其證明方式。

Silberberg 討論的【**命題 1**】，可以敘述如下。

在下述模型中，

(32) $$\max_{x,y} \quad U(x,y)$$

(33) $$s.t. \quad px+qy=M$$

當效用函數$U(x,y)$被$V(x,y)=F(U(x,y))$且$F'(U)>0$所替換時，所推導出的需求曲線是完全相同的。

接著，Silberberg (1978, pp. 240-241)提出其證明，他所採用的證明與我們習慣採取的證明方式的差異，出現在有關二階條件(無異曲線凸向原點)的證明方式不同。當我們將消費者的選擇模型由兩種商品的模型一般化而設計成多種商品的模型，在證明正向單調轉換前後最適化的二階條件(無異曲線凸向原點)維持不變時，Silberberg 這項證明方式是比較方便的證明方式。

接著，我們就介紹 Silberberg (1978, pp. 240-241)所採用的證明。

我們都知道，兩種商品的需求曲線或函數是由「無異曲線與預算限制線的相切的條件」與「預算限制線」兩條件聯立方程式，求解或推導出來的。

這兩個邊際條件與預算限制線所構成的最適化一階條件分別是：

(34) $$\frac{U_x}{U_y}=\frac{p}{q}$$

(35) $$M-px-qy=0$$

這兩條方程式的解就是$x^*(p,q,M)$和$y^*(p,q,M)$的需求曲線。

另外，二階條件要求：

$$D=\begin{vmatrix} U_{xx} & U_{xy} & -p \\ U_{yx} & U_{yy} & -q \\ -p & -q & 0 \end{vmatrix} > 0 \tag{36}$$

這等於是：

$$\begin{aligned} D &= pqU_{xy} + pqU_{xy} - p^2U_{yy} - q^2U_{xx} \\ &= 2pqU_{xy} - p^2U_{yy} - q^2U_{xx} \\ &= pq(2U_{xy} - \frac{p}{q}U_{yy} - \frac{q}{p}U_{xx}) \\ &= pq(2U_{xy} - \frac{U_x}{U_y}U_{yy} - \frac{U_y}{U_x}U_{xx}) \\ &= pq\frac{1}{U_xU_y}(2U_xU_yU_{xy} - U_x^2U_{yy} - U_y^2U_{xx}) > 0 \end{aligned} \tag{37}$$

因此$D>0$與我們常用的方程式(4)中，$U_x^2U_{yy}-2U_xU_yU_{xy}+U_y^2U_{xx}<0$的結果，是一樣的條件。

接著，我們可以問「以$V(x,y)=F(U(x,y))$來取代$U(x,y)$」時，這些公式(一階與二階條件)會受到何種影響呢？也就是重新標記無異曲線的數據大小，但保留了偏好高低的排名順序，會造成什麼影響？

單調轉換後模型變為：

$$\max_{x,y} \quad V(x,y) \tag{38}$$

$$s.t. \quad px+qy=M \tag{35}$$

兩條一階條件分別是：

$$\frac{V_x}{V_y}=\frac{p}{q} \tag{39}$$

(35) $$M - px - qy = 0$$

然而，因為單調轉換的關係 $V_x = F'(U)U_x$ 且 $V_y = F'(U)U_y$，我們因此可以得到：

(40) $$\frac{V_x}{V_y} = \frac{F'U_x}{F'U_y} = \frac{U_x}{U_y} = \frac{p}{q}$$

因為 V_x / V_y 與 U_x / U_y 完全相同，最適化的一階條件沒有發生變化，所以效用函數經過單調轉換後所解得的需求函數將不會發生改變。

然而，我們還沒有完全成功。我們還得證明 $V_x / V_y = p / q$ 所對應的點確實是預算限制下的一個效用極大點，而不是一個最小效用的點。因此，我們必須檢查，在正向單調轉換 $F(U(x, y))$ 且 $F' > 0$ 之下，極大化的二階條件是否會滿足。

因為 $V_x = F'(U)U_x$，在使用該乘法和鏈規則，可得 $V_{xx} = F'U_{xx} + F''U_xU_x$，以及其一般化條件為：

(41) $$V_{ij} = F'U_{ij} + F''U_iU_j$$

因此，對於 $V(x, y)$ 的效用函數下的二階條件是

(42) $$D' = \begin{vmatrix} V_{xx} & V_{xy} & -p \\ V_{yx} & V_{yy} & -q \\ -p & -q & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'U_{xx} + F''U_x^2 & F'U_{xy} + F''U_xU_y & -p \\ F'U_{yx} + F''U_yU_x & F'U_{yy} + F''U_y^2 & -q \\ -p & -q & 0 \end{vmatrix} > 0$$

是否在 $V(x, y)$ 的效用函數下的二階條件 D' 相當於在 $U(x, y)$ 的效用函數下的二階條件 D 呢？請注意其中 $p = U_x / \lambda$、$q = U_y / \lambda$，並且 λ 是貨幣的邊際效用或是 Langrangian 乘數。

(43) $$D' = \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} F'U_{xx} + F''U_x^2 & F'U_{xy} + F''U_xU_y & -p \\ F'U_{yx} + F''U_yU_x & F'U_{yy} + F''U_y^2 & -q \\ -U_x & -U_y & 0 \end{vmatrix}$$

如果最後一行乘以 $F''U_y$，然後加到第二行，行列式的值不會受到影響。但藉由這

項計算具有剔除第二行中的第一項中的 $F''U_xU_y$ 和第二項中的 $F''U_y^2$ 的效果。

(44)
$$D' = \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} F'U_{xx} + F''U_x^2 & F'U_{xy} + F''U_xU_y & -p \\ F'U_{yx} & F'U_{yy} & -q \\ -U_x & -U_y & 0 \end{vmatrix}$$

另外，如果第三行乘以 $F''U_x$，然後加到第一行中，該行的 $F''U_x^2$ 與 $F''U_xU_y$ 兩項將會被剔除。

(45)
$$D' = \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} F'U_{xx} & F'U_{xy} & -p \\ F'U_{yx} & F'U_{yy} & -q \\ -U_x & -U_y & 0 \end{vmatrix}$$

重新以價格來表示最後一行，可得

(46)
$$D' = \begin{vmatrix} F'U_{xx} & F'U_{xy} & -p \\ F'U_{yx} & F'U_{yy} & -q \\ -p & -q & 0 \end{vmatrix}$$

現在從前兩行將 F' 分解出來

(47)
$$D' = (F')^2\begin{vmatrix} U_{xx} & U_{xy} & \frac{-p}{F'} \\ U_{yx} & U_{yy} & \frac{-q}{F'} \\ -p & -q & 0 \end{vmatrix}$$

最後一列乘以 F'，可得

(48)
$$D' = F'\begin{vmatrix} U_{xx} & U_{xy} & -p \\ U_{yx} & U_{yy} & -q \\ -p & -q & 0 \end{vmatrix} = F'D$$

因此，伴隨著效用函數$V(x,y)=F(U(x,y))$下的加上邊界的行列式D'是相同於伴隨著效用函數$U(x,y)$下的加上邊界的行列式D乘上$F'>0$的結果。因為$F'>0$，所以D'和D具有相同的正負符號，因此$F(U(x,y))$實現了最大效用只要$U(x,y)$實現了最大效用，反之亦然。這就完成了【命題 1】的證明。

接著，Silberberg 做了一些我認為很有意思的評論，這是我很喜歡引用的評論：

> 需求曲線是獨立於效用函數的任何單調轉換；也就是說，它們是獨立對無差異曲線圖的重新標記效用數據的大小。這個命題只是強化只有交換價值才是重點的觀念。沿任意一條無差異曲線，斜率反映或衡量一位消費者為獲得更多的一種商品所願意放棄的另一種商品的數量的取捨關係。商品的這些邊際評價是價值的唯一操作型衡量方式；無論無差異曲線是被標記為 10 效用單位或 10,000 或 1010 效用單位都一點也不重要。關於這一水平曲線所對應的價值和交易意義，是斜率，也只有是斜率，才是重要的，而不是標記在任何消費組合所伴隨著的「滿意」的指標的大小。事實上，我們不可能分辨消費者是高興還是不高興於消費特定商品組合。如果這些是他或她必須作出決定的唯一貨物，但交換值不是。(In fact, it is impossible to tell whether a consumer is pleased or displeased to consume a given commodity bundle. If those are the only goods over which he or she has to make decisions, the *exchange* values do not.)
>
> 上面的推導也澄清了為什麼邊際效用遞減的概念對現代經濟學是不相關的。應用嚴格序數效用，相對於商品的變化所產生的邊際效用的變化率只取決於所採用的特殊的排序指數。考慮V_{ij}和U_{ij}之間的關係：$V_{ij}=F'U_{ij}+F''U_iU_j$。
>
> 設$F'>0$，並且 U_i 和 U_j是正值，因為沒有最高滿足點(nonsatiation)。然而，F''可以是正數也可以是負數；例如，如果$F(U)=\log U$,則$F'>0$和$F''<0$；如果 $F(U)=e^U$ ，則$F'>0$和$F''>0$。假設$U_{ij}<0$。然後，如果V被如此選擇使得$F''>0$，則可能會出現$V_{ij}>0$。同樣地，如果$U_{ij}>0$，則有一些單調轉換將使$F''<0$負的足夠大使得$V_{ij}<0$。因此U_{ij}和V_{ij}⋯不需要具有相同的符號，但相同的需求曲線還

> 是可由這些不同的效用函數推導而得！因此，一組給定的觀察到的需求關係是與展示邊際效用遞減的效用函數，並且是與一些單調轉換後呈現出邊際效用遞增的效用函數是一致的。因此，邊際效用變化率增加或減少沒有帶來可觀察到的含意。
>
> 與此類似，經濟學家曾經以邊際效用來定義互補或替代品：兩個商品被稱為互補如果消費更多的其中一種商品會提高另一種商品的邊際效用；反之為替代品。例如，有人認為，一個人增加餅乾(pretzels)消費會提高啤酒的邊際效用，因此啤酒和餅乾是互補的。上面的代數結果說明了為什麼這種推理是錯誤的。(The algebra above shows why this reasoning is fallacious.) 在此定義被考慮的條件是 $\partial U_i / \partial x_j = U_{ij} = U_{ji}$。但如果 $U_{ij} > 0$，譬如說，某一單調轉換使得 $\partial V_i / \partial x_j = V_{ij} < 0$，所以符號與 U_{ij} 相反，並且這還意味著同一可觀察到的行為，總結於需求關係之中。因此，這個定義不能分類可觀察到的行為，因此是無用的。(Hence this definition is incapable of categorizing observable behavior and is thus useless.)

我對 Silberberg 的思維方式的評論：寧可相信數學與理論不願意相信事實，如果事實與理論不符合則這個真實世界就糟糕了。我常在我的經濟學研究生涯中遇到一些小有成就的學者抱持這樣的看法。

4. 多種商品的模型

接著，我們就利用 Schultz (1935)的知名《需求、價格和所得的相互關係》(Interrelations of Demand, Price and Income)文章中，所介紹的多種商品的模型，來討論為何放棄「所得增加邊際效用會降低的商品為劣等品的定義」的效用極大化模型會變成「黑箱理論」的問題。

但在展開此介紹工作之前，我們簡單回顧一下在林忠正(2015)〈序數與基數效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉文章中，所提到的 Schultz (1935)在發生於 1930 年代的序數效用革命的高峰期時，發揮將 Slutsky (1915/1952)發表於一份義大利期刊的論文介紹給英語世界的經濟學家的作用的歷史故事。

我們知道在 Hicks and Allen (1934)的知名文章〈價值理論的重建〉(The Reconsideration of the Theory of Value)裡，應用 Pareto 所提出的無異曲線的序數效用性質，進行需求理論的重建工作。

然而，Hicks and Allen 並沒有取得先機，因為消費需求理論在一般化總效用分析架構下的代表性且系統化的分析是在 1915 年率先由 Slutsky 所完成的。Slutsky 是一位俄國經濟學與統計學家，他的知名的基礎性文章，發表於義大利雜誌《經濟學家雜誌》(*Giornale degli Economisti*)，那是一份 Pareto 出版他的大部分貢獻的雜誌。Slutsky (1915/1952)在此論文中，首次分析在只能排序的效用概念下，探討所得效果與替代效果等需求理論的相關性質，但這篇論文是非以英文撰寫且發表於義大利的期刊上，因此這篇論文不為當時講英語的經濟學家所知悉。

在 Hicks and Allen (1934)知名的長文發表之時，Slutsky 的論文一直沒有受到當時經濟學界的普遍關注。任教於芝加哥大學的 Schultz (1935)在讀了 Hicks and Allen (1934)之後，寫了〈需求、價格和所得的交互作用〉的文章介紹了 Slutsky 理論，英美經濟學界才普遍知道 Slutsky 早在 Hicks and Allen (1934)所合著的文章發表之前，就已經大致完成 Pareto 序數效用概念下需求理論的主要重建工作。

4.1 簡介

Schultz (1935)在該文一開始的前言中，提到所得和價格會影響商品的需求當然是不言自明之事。並且，對於個人消費者，需求、所得和價格之間的相互關係，基本上是已經出現在 Pareto、Slutsky、以及 Hicks and Allen 的作品中了。

Schultz (1935)在此文中的一項主要目標，就是以一個簡單的且合乎邏輯的方式發展與呈現需求、所得和價格之間的相互關係。[2]

4.2 定義

在 Walras 以及 Pareto 的交換的一般理論中，所得並不是以一個獨立的和獨特的變數

[2] 其他主要目標包含：(1)顯示他們對互補性(completing)和競爭性(competing)商品的需求理論和替代彈性的關係；(2)呼籲人們關注這一領域中一些尚未求解的問題；以及(3)將這些理論結果與具體的、統計資料所呈現的牛肉、豬肉和羊肉的需求曲線的結果相互比較。

被引入的。個人交易者被假設來到市場時帶著n種商品$X,Y,Z,\ldots$的某個固定數量$x_0,y_0,z_0,\ldots$。這些數量構成了他的**交易時可用的存量**或**可用於交易的存量**(*stock in trade*)，或者他的**財富**(*wealth*)，其中至少要有一種貨品的數量不可以為零。在交換結束時，他擁有同樣商品的數量稱為$x,y,z,\ldots$。任何一種商品(如Y)的最終和初始數量$(y-y_0)$之間的差可以是正數或負數。正數的情況表示**需求量**；而在負數的情況表示**供給量**。

假設這n種商品$X,Y,Z,\ldots$的價格分別是$p_x,p_y,p_z\ldots$，並且假設這些價格不會受到個人交易行為的影響，表達這一事實的方程式是

(49a) $$(x-x_0)p_x+(y-y_0)p_y+(z-z_0)p_z+\ldots=0$$

並且

(49b) $$M\equiv x_0p_x+y_0p_y+z_0p_z+\ldots=xp_x+yp_y+zp_z+\ldots$$

其中M是個人所得的**貨幣價值**(*money value*)。

使用式（49b）的優點是，它使我們能夠把所得作為單一變數M，從而方便在需求分析中加以使用。式（49a）的優點在於，它可以被用於確定不只是關於任何商品的需求曲線和同時包括供給曲線(對應於固定的存量)，因為它分開列出了固定存量$x_0,y_0,\ldots$，並且沒有把它們全部湊在一個變數M裡。

當然，方程式（49a）本身不足以確定個人將需求或供給的數量$(x-x_0),(y-y_0),(z-z_0),\cdots$。為了確定這些未知數，我們還必須知道他的偏好或慾望，也就是說，他的效用函數。讓這個函數為，

(50) $$\varphi=\varphi(x,y,z,\ldots)$$

以及令它相對於$x,y,\ldots$的偏導數為

(51) $$\begin{cases}\varphi_x=\varphi_x(x,y,z,\ldots)\\ \varphi_y=\varphi_y(x,y,z,\ldots)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

分別是 $x, y, \ldots$ 的最終程度的效用(the final degrees of utility)。我們所做的通常假設應該是

(52) $$\begin{cases} \varphi_x > 0, \quad \varphi_y > 0, \quad \ldots \\ \varphi_{xx} < 0, \quad \varphi_{yy} < 0, \quad \ldots \end{cases}$$

以及

(53) $$\varphi_{xy} \gtreqless 0, \quad \varphi_{xz} \gtreqless 0, \quad \varphi_{yz} \gtreqless 0$$

根據討論中的商品彼此在消費上是互補品、獨立品，或競爭品。然後，我們可獲得知名的 $(n-1)$ 個獨立關係式的體系

(54) $$\frac{\varphi_x}{p_x} = \frac{\varphi_y}{p_y} = \frac{\varphi_z}{p_z} = \ldots$$

其表達的事實是，在給定個人的預算限制式之下，使他的慾望或嗜好達到效用極大的條件。他的加權的最終程度的效用是彼此相等，權重恰好是它們價格的倒數。價格除以最終程度的效用可得到該商品單位的「錢的或貨幣價值」(dollar's worth)。因此，這些方程式意指，在邊際上，花在所有商品上的每一塊錢的「錢的或貨幣價值」是一樣的。與式（49a）一起，它們構成一個包含 n 個獨立方程式的系統，一般而言這些方程式足以確定 n 個數量。

在這裡有另外一個關係，在有些場合中，我們會使用到所以應該加以定義。定義 $\varphi_x/p_x, \varphi_y/p_y, \varphi_z/p_z, \ldots$ 的共同均衡價值為 λ ，因此：

(55) $$\lambda = \frac{\varphi_x}{p_x} = \frac{\varphi_y}{p_y} = \frac{\varphi_z}{p_z} = \ldots$$

然後，我們定義 λ 作為**貨幣支出的最終效用**(*final utility of money expenditure*)。[3]此定義使

[3] For a more detailed discussion of this concept see François Divisia, *Économique rationnelle* (Paris, 1928), pp. 416-33; and R. G. D. Allen, "On the Marginal Utility of Money and Its Application," *Economica*, XIII (1933), especially 187-94.

λ為均衡價格和個人擁有的初始量（所得）的函數。因為式（55）只在均衡時才為真，因此貨幣支出的最終效用的概念是一種均衡的概念，因此，不同於一個直接商品的最終效用—一個在所有條件下都具有意義的概念。貨幣的最終效用不應與現金餘額（Walras的現金餘額期望；Walras' *encaisse désirée*）的最終效用混淆，儘管這兩個概念是互相關聯的。

上述定義意味著效用是一個可測量的數量，除了起點和比例常數之外是唯一確定的。這種假設是必要的，以便給效用函數二階偏導數$\varphi_{xx},\varphi_{xy},\ldots$確定的符號。[4]然而，我們隨後將會理解到，從本文中所得出的比較重要的結果並不取決於效用可衡量的假設的有效性，而是在φ的變換在任何函數$F(\varphi)$下是不變的，$F(\varphi)$除條件$F'>0$外完全是任意的。

4.3 問題的陳述

以對稱形式來表示，式(55)可以寫成

(56) $$\varphi_x=\lambda p_x,\quad \varphi_y=\lambda p_y,\quad \varphi_z=\lambda p_z,\ldots$$

此方程式體系配合式（49a）的解，正如我們所看到的，可以決定均衡數量$(x-x_0),(y-y_0),(z-z_0),\ldots,$，即個人在固定的價格$p_x,p_y,p_z,\ldots$的假設下所將需求或供給的數量。

因為他的嗜好（效用函數）被假定為沒有任何改變，在此系統中的任何一項變化不是通過商品價格的變化就會是通過他的所得的變化所引起的。在此，我們希望知道的是所得M變化時會導出怎樣的結果，即以下的偏導數的數值會是什麼

(57) $$\frac{\partial\lambda}{\partial M},\quad \frac{\partial x}{\partial M},\quad \frac{\partial y}{\partial M},\quad \ldots$$

4 See Vilfredo Pareto, *Manuel d'économie Politique* (Paris, 1909), pp. 545-46; O. Lange, "The Determinateness of the Utility Function," *Review of Economic Studies*, I (1934), 218-25; E. H. Phelps Brown, H. Bernardelli, and O. Lange, "Notes on the Determinateness of the Utility Function," *ibid*., II (1934), 66-77; and R. G. D. Allen, "A Note on the Determinateness of the Utility Function," *ibid*., II (1935), 155-58.

以及在它們之間必須存在什麼關係，以使式（49a）和式（56），或式（49b）和式（56），可以被滿足？

4.4 所得變化對需求數量的影響

這個問題的解答首先由 Pareto 於 1892 年所提供，[5]但一種簡化的、擴展性的、並且更優雅的形態的求解方式是由俄羅斯統計學家和經濟學家 Eugen Slutsky 教授於 1915 年一篇了不起的論文所提出的。[6]Schultz (1935)在《需求、價格和所得的相互關係》的文章中，遵循 Slutsky 的一般的求解程序，但盡量減少偏離 Pareto 的象徵意義，因為 Pareto 的作品在當時比較容易獲得。我們就介紹 Schultz (1935)如何介紹所得變化對需求的影響。[7]

為分析所得的變化對需求的影響，更方便的做法是以貨幣來表達所得，即使用式（49b），而不是式（49a）。因此，對式（49b）和式（56）執行相對於 M 的微分，並記住市場價格被假定為不受個人所得變化的影響，我們得到以下 $(n+1)$ 條聯立方程集合：

$$
\text{(58)} \qquad \left\{
\begin{array}{l}
1 = 0 + p_x \dfrac{\partial x}{\partial M} + p_y \dfrac{\partial y}{\partial M} + p_z \dfrac{\partial z}{\partial M} + \ldots \\
0 = -p_x \dfrac{\partial \lambda}{\partial M} + \varphi_{xx} \dfrac{\partial x}{\partial M} + \varphi_{xy} \dfrac{\partial y}{\partial M} + \varphi_{xz} \dfrac{\partial z}{\partial M} + \ldots \\
0 = -p_y \dfrac{\partial \lambda}{\partial M} + \varphi_{xy} \dfrac{\partial x}{\partial M} + \varphi_{yy} \dfrac{\partial y}{\partial M} + \varphi_{yz} \dfrac{\partial z}{\partial M} + \ldots \\
0 = -p_z \dfrac{\partial \lambda}{\partial M} + \varphi_{xz} \dfrac{\partial x}{\partial M} + \varphi_{yz} \dfrac{\partial y}{\partial M} + \varphi_{zz} \dfrac{\partial z}{\partial M} + \ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}
\right.
$$

從其中可決定 $(n+1)$ 個未知的偏導數：$\partial\lambda/\partial M, \partial x/\partial M, \partial y/\partial M, \ldots$

---

[5] "Considerazioni sui principii fondamentali dell'economia pura," *Giornale degli economists*, 2d ser., IV (1892), 389-420; *ibid*., V (1892), 119-57; ibid., VI (1893), 1-37; *ibid*., VII (1893), 279-321; *Cours d'économie politique* (Lausanne, 1896), Vol. II, §977; *Manuel d'économie politique* (Paris, 1909), Appendix, §§52-62, 579-91; and "Économie mathématique," *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Tome I, Vol. IV, Fascicule 4 (1911), §§32-36.

[6] Eugen Slutsky, "Sulla teoria del bilancio del consumatore," *Giornale degli economisti*, LI (1915), 1-26.

[7] Schultz (1935)還分析價格變化對需求的影響，及價格和所得與需求之間的相互關係，即 Slutsky 方程式。

以矩陣的方式重寫(58)式：

$$
\begin{bmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z & \cdots \\ -p_x & \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} & \cdots \\ -p_y & \varphi_{xy} & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} & \cdots \\ -p_z & \varphi_{xz} & \varphi_{yz} & \varphi_{zz} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \partial\lambda/\partial M \\ \partial x/\partial M \\ \partial y/\partial M \\ \partial z/\partial M \\ \vdots \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}
\tag{59}
$$

所得變化對需求的影響，其解是

$$\frac{\partial\lambda}{\partial M} = \frac{-D_{11}}{D} \tag{60}$$

$$\frac{\partial x}{\partial M} = \frac{D_{12}}{D} \tag{61}$$

$$\frac{\partial y}{\partial M} = \frac{D_{13}}{D} \tag{62}$$

其中，

$$
D = -\begin{vmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z & \cdots \\ p_x & \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} & \cdots \\ p_y & \varphi_{xy} & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} & \cdots \\ p_z & \varphi_{xz} & \varphi_{yz} & \varphi_{zz} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}
\tag{63}
$$

並且讓 D_{ij} 是對應於 D 的第 i 行和第 j 列的項目的**輔因子**(cofactor)，由於 D 的對稱性，所以 D_{ij} 等於 D_{ji}。

值得注意的是，我們可以應用上節中 Silberberg (1978, pp. 240-241)所介紹的證明方式，證明單調轉換前後不會改變分析的結果。

4.5 更加漆黑的黑箱理論

當商品的數量或選項增加時，黑箱就更加漆黑了。

在多個變數的模型中，其交互作用非常複雜，因為

(64) $$D_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & p_y & p_z & \cdots \\ p_x & 0 & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} & \cdots \\ p_y & 0 & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} & \cdots \\ p_z & 0 & \varphi_{yz} & \varphi_{zz} & \cdots \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

(65) $$D_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & p_x & 1 & p_z & \cdots \\ p_x & \varphi_{xx} & 0 & \varphi_{xz} & \cdots \\ p_y & \varphi_{xy} & 0 & \varphi_{yz} & \cdots \\ p_z & \varphi_{xz} & 0 & \varphi_{zz} & \cdots \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

我們可以分別以序數效用與基數效用的觀點，來評論這樣的在一次決策下同時做出多種商品的採購或分配理論所獲得的分析結果。

首先，在序數效用理論裡，因為總效用的二次微分項的正負與數值大小都沒有意義，所以無論商品的種類有多少，都必須自己交出心理意義的解釋權力的序數效用理論，只好走入黑箱之中，為何所得提高有些商品的需求數量會增加，有些會減少，有些會維持不變，原因何在？完全不知道，不能置一詞，反正就是一個刺激一個反應，至於為何會如此反應，不知道，也不能知道，因為一談到心理原因，就會違反科學的完美理論的基本精神，所以經濟學必須「逃離心理學」(escape from psychology)。

其次，在基數效用裡，以上兩個行列式的值事實上是相當複雜的，因為其中牽涉到非常多的心理上的總效用交叉項，要理解這背後的複雜的運作心理歷程是不可能的任務。我個人猜測人的心智能力是很難或無法做出如此複雜多層次的思維運算的，這是一種不可能的理論。我們實在不應該以「舉一反三」或「聞一知十」的低層次的思維方式，毫不加思索地，將兩種商品的模型依「依此類推」的方式推導至多種商品的模型。

事實上，在所得變動下，如何影響某一特定商品的購買行為，其實不只會受所得變動的直接影響，還會受到因所得變動而受到影響的其他變數的變動的間接影響，即這些變動後的變數再進一步間接造成的對所關注商品購買數量的第二波影響，甚至是透過商

品之間彼此對彼此的影響再對所關注商品購買數量造成的第三波、第四波…的影響，我們最後所觀察到的所關注商品的購買數量變動方向其實會與消費者的直接心理感受(邊際效用的變化方向)可能會是不一致的，因此實際購買行為的變化方向不是心理定義(邊際效用的變化方向)的完美替代性定義，甚至由市場觀察到的行為可能會導致與心理感受剛好完全相反的詮釋。從而除非萬萬不得已，否則我們沒有合宜的理由放棄立基正常的心理現象的劣等品定義，但當代主流的個體序數效用理論的確放棄以此正常的劣等品定義來建構經濟理論的發展路徑。

人有能力進行如此複雜的思維與取捨的抉擇嗎？基數效用分析架構之下，太複雜了，這個彰顯了這是一種不可能的理論。

所以這類不切實際理論的基本辯護，就是只能強調理論可以不切實際了。但沒有其他學科會採取如此明顯違反現實的立場，現代個體選擇理論的確是一種怪異的理論。

5. 不得不放棄心理內涵詮釋權的黑箱理論

論述至此，我們就可以清楚地意識到：為何序數總效用理論的基本先天特性不能與個體經濟決策的基本核心性質共存共榮的基本癥結所在了。

再強調一次，因為一個(序數總效用理論)的邊際效用變化方向不能有意義，一個(個體經濟決策比較靜態分析的基本核心性質)必須用到邊際效用的變化方向，這兩者是先天地不搭調的。但在現代主流的個體理論中被勉強搭配在一起，這是一項具有先天侷限性的搭配，這也創造了一種先天上有嚴重缺陷的理論。

或許，我們可以稱現代主流的「在預算限制式下極大化序數總效用的分析架構」，如 Bernardelli (1934)所言的是一種不得不砍斷一隻腳的「單腳理論」，看看只剩一隻腳在理論的路上可以走得多好多平穩；或者，我們也可以說，是一種不得不砍斷一隻手的「單手理論」，看看只剩下一隻手在理論的路上可以把事情做得多好多靈活；或是一種不得不放棄一隻眼睛的「獨眼理論」，看看只剩一隻眼睛在理論的路上可以看得多清楚多深入。其關鍵原因，就在現代主流的「在預算限制下極大化序數總效用的分析架構」必須放棄邊際效用變化方向正負的心理的經濟意義，這理論必須把正常的心理思維、程序與內涵全部驅離出理論框架中，這是一種無心的理論、或一種只有市場觀察，而沒有心的「空

心理論」，是一種只是能觀察到「一個刺激一個反應」，而不知道為何會導致如此反應的理論，因此我們稱它是一種類似於二十世紀初期的心理學者 John Watson 鼓吹的行為主義的黑箱理論，只是一種經濟學裡的「黑箱理論」。

Reference

林忠正，(2014)，〈法國經濟學的學生運動〉，民報。

林忠正，(2014)，〈與學生站在同一陣線的法國經濟學教授的聲援〉，民報。

邢慕寰譯，1967，《價值與資本》(Value and Capital)，台北市：台灣銀行經濟研究室。

Allen, R.G.D. (1933) “On the Marginal Utility of Money and Its Application,” *Economica*, 40, pp. 186-209.

Allen, R.G.D. (1935) “A Note on the Determinateness of the Utility Function,” *Review of Economic Studies*, 2, pp. 155–158.

Bernardelli, H. (1934) “Notes on the Determinateness of the Utility Function: II,” *Review of Economic Studies*, 2, pp. 69–75.

Brown, E.P. (1934) “Notes on the Determinateness of the Utility Function: I,” *The Review of Economic Studies*, 2:1, pp. 66-69.

Hicks, J.R. and R.G.D. Allen (1934) “A Reconsideration of the Theory of Value,” *Economica*, NS, 1: 52–76, 196–219.

Lange, O. (1934) “The Determinateness of the Utility Function,” *Review of Economic Studies*, 1, pp. 218–25.

Lange, O. (1934) “Notes on the Determinateness of the Utility Function: III,” *Review of Economic Studies*, 2, pp. 75–7.

Schultz, H. (1935) “Interrelations of Demand, Price, and Income,” *The Journal of Political Economy*, 43:4, pp. 433-481.

Silberberg, E. (1978) *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, McGraw-Hill.

Slutsky, E. (1915) "Sulla teoria del bilancio del consumatore," *Giornale degli economisti e rivista di statistica*, 1-26.

Slutsky, E. (1952) "On the Theory of the Budget of the Consumer," translated by Olga Ragusa. In G. J. Stigler and K. E. Boulding eds., *Readings in Price Theory*, pp. 27–56. Homewood, Ill.: Irwin.

Pareto, V. (1892) "Considerazioni sui principii fondamentali dell'economia politica pura," *Giornale degli economisti*, 4:3, pp. 389-420.

Pareto, V. ([1909] 1971) *Manual of Political Economy*, New York: Kelley.

Pareto, V. (1911) "Économie mathématique," *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Tome I, 4, 14.

Pareto, V. (1964) *Cours d'économie politique*, Librairie Droz.

Watson, J. B. (1930) *Behaviorism*, Revised edition, Chicago: University of Chicago Press.

邁向需求理論的再次重建之路的系列論文

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色：難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(I)：效用極大化的 Marshall 模型與無意義的邊際效用遞減法則〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(II)：Marshall 的「邊際需求價格」模型與古典效用可衡量概念的意義〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈為 Marshall 需求理論編寫一冊返回經濟學舞台的劇本： 比較商品效用與價格效用的邊際摸索決策方式的 Marshall 模型〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法：完成序數效用革命理論的誕生〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈經濟學新的跨界十字交叉(A New Cross-Cross)圖形：取代無異曲線圖示的跨界序數邊際效用分析法的新圖示〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數效用革命的頭號戰犯：序數主義者眼中邏輯謬誤的常識性邊際效用互補性定義〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈為什麼我們需要一個純正的立基心理法則的序數互補性理論？：難覓古典的 ALEP 互補性定義的完美分身〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」：在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈錯把馮京當馬涼：當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形 I：等序數邊際效用曲線〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形 II：序數邊際效用曲線〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2016)，〈連劣等品都不能妥善解釋的現代個體理論不要也罷：你不可以說「所得提高我對某一商品的邊際效用提高了」〉，台灣經濟學會研討論文。