連劣等品都不能妥善解釋的現代個體理論不要也罷

你不可以說「所得提高我對某一商品的邊際效用提高了」

林忠正*
中央研究院經濟所研究員
國立政治大學財政系教授
國立交通大學經營管理研究所教授
台北市南港區(115-41)研究院路 2 段 128 號
中央研究院經濟所
電話: 886-2-2782-2791 轉 507
電子信箱: cclin@econ.sinica.edu.tw

開始撰稿-2015年12月21日
完稿時間-2015年12月31日
列印時間-2016年4月14日

* 謝謝林曉珮助理非常有效率的協助，也很謝謝政大財政研究所所江若妘同學的細心校稿。

連劣等品都不能妥善解釋的現代個體理論不要也罷

你不可以說「所得提高我對某一商品的邊際效用提高了」

[摘要] 由本文開始，我們由劣等品的定義著手，對序數與基數效用理論，展開建設性破壞的第三波攻擊，並進行需求理論的積極重建工作。這篇文章再一次運用五種簡單的數學表述方式，來說明「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」在序數效用與基數效用兩種現代主要效用理論中的尷尬地位。序數效用的分析架構中不能容許「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」有任何容身之處，序數效用理論因此是一種不能容納心理常識的怪異理論。基數效用可以提供「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」棲身之地，但卻也只能提供如針尖般大小的立錐之地，因為基數效用是如長度一樣是一種相當強烈地可衡量的概念，Samuelson (1938)也批評這是一種「無限地不可能的」(infinitely improbable)在真實人生中成立的理論。現代兩種主要效用理論，序數理論違反劣等品的常識定義，基數理論違反效用不可測性原則。兩種效用理論都無法提供劣等品、中立品與正常品合宜的理論位置或充分的存在空間，都有嚴重的缺失。此文的目的很單純，主要希望運用多種簡單的數學表述方式，使不熟悉此問題的讀者能深刻地了解與體認到現代效用理論與個體理論所面對的基本困境，也深刻理解在我們提出新理論之前，或許我們慢慢會很自然產生一項很怪異的、狂傲的、而且是非常沒有禮貌的懷疑：是否經濟學一套建立在效用概念下的真正合宜的個體選擇理論在此之前還未誕生呢？

JEL 分類：B130, D110

其實，所有這些奇奇怪怪的怪異劣等品定義與論述的現象，都指向一件事實，現在的需求理論是一個具有嚴重根本性缺失的理論。而這缺失，可能就出在現代經濟理論的最出發點的地方，也就是經濟學個體選擇理論的第一個假設就出錯了。

錯誤且怪異的需求理論要被真正地棄置，必須等待一場反革命或嶄新革命的誕生。

1. 難以理解的現代經濟學的劣等品定義

由本文開始，我們要對現今主流的預算限制下極大化總效用的分析典範，展開建設性破壞的第三波攻擊。我們由劣等品(以及正常品)的定義著手，吹響對序數與基數效用理論的第三波攻擊的號角，並在後續的文章中進行建設性的關於劣等品需求理論的重建工程。[1]

在我們的一生中，所得或收入有低有高，隨著所得或收入的變動，我們對一些商品的評價不會發生改變，對一些商品的評價會提高，以及對一些商品的評價會下降。以經濟學的術語來說，隨著所得或收入的變動，我們對一些商品的邊際效用不會發生改變，對一些商品的邊際效用會提高，以及對一些商品的邊際效用會下降。這應該是再正常不過的日常心理經驗。而這些心理經驗事實上與商品是由所得觀點來看的正常品、中立品與劣等品密切相關。

嘗試去問一些還沒有受過現代經濟理論洗禮或洗腦的人，他會怎樣定義一項商品是由所得角度來看的劣等品。一個最可能的常識性答案應該是：所得增加會降低所關注商品的邊際效用，此時所關注的商品就是劣等品。同理，所得增加會提高所關注商品的邊際效用，此時所關注的商品就是正常品。類似地，所得增加不會影響所關注商品的邊際效用，此時所關注的商品就是由所得觀點來看的中立品。

但是，你知道且會相信嗎？現在主流個體經濟學的預算限制下極大化序數總效用理論正式且嚴謹地強烈主張，你不可以那樣定義劣等品、正常品和中立品。也就是，不准

[1] 或許你已經猜到我們將要做什麼，或許這分析因為重複性會讓你覺得煩，那麼你已經對我們的推理與論說方式非常熟悉了。此時，你可以先在內心思考與模擬此文的論述內容，然後以快速的方式讀過此文或者就直接略過此文。

採取「所得提高商品邊際效用降低為劣等品，所得提高商品邊際效用增加為正常品，所得提高商品邊際效用維持不變為中立品」的心理定義。

這是為什麼呢？怎麼可能會出現這種奇奇怪怪的事呢？一門在大學與研究所擁有長期正式穩固地位並且還擁有諾貝爾獎光環的重要學科，最重要的個人選擇理論怎麼可能會存在這麼基本的缺陷呢？這是真的嗎？

但這的確是千真萬確的事，為什麼呢？

簡單地說，因為上述所得增加邊際效用會降低的商品為劣等品的定義，與現代流行的序數總效用理論的核心精神不能相容。序數總效用理論主張效用數值只有總效用的相對大小次序有意義，因此連帶地兩個總效用數值的差(邊際效用)的正負有意義，但邊際效用數值的大小沒有意義，因而兩個邊際效用數值的差(邊際效用變化)的正負無意義；也就是總效用的二次微分項正負沒有意義。建立在所得變動對商品邊際效用正負的劣等品定義因為正是立基於總效用的二次微分項的定義，於是變成一種無意義的概念，不能在序數效用理論中加以應用。

事實上，你去翻閱當今的個體經濟學教科書，你找不到上述直覺的劣等品定義。你找到將是「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」。

這是非常奇怪的事，我是指對一般正常的人而言，而不是已深受經濟學洗禮或洗腦的人而言，要定義劣等品、正常品與中立品，這種「大家都知道的事」，為何不能直接訴求於消費者的心理與偏好感受，反而是只能藉由觀察所得變動對實際購買行為的影響來定義，這樣的定義方式可能會導致與消費者的直接心理感受(邊際效用的變化方向)不一致的現象。這原因可先簡單直覺地說明如下：在所得變動下，如何影響某一特定商品的購買行為，其實不只會受所得變動的直接影響，還會受到因所得變動而受到影響的其他變數的變動的間接影響，即這些變動後的變數再進一步間接造成的對所關注商品購買數量的第二波影響，甚至是透過商品之間彼此對彼此的影響再對所關注商品購買數量造成的第三波、第四波…的影響，我們最後所觀察到的所關注商品的購買數量變動方向其實會與消費者的直接心理感受(邊際效用的變化方向)可能會是不一致的，因此實際購買行為的變化方向不是心理定義(邊際效用的變化方向)的完美替代性定義，甚至由市場觀察到的行為可能會導致與心理感受剛好完全相反的詮釋，例如我可能因為所得的大幅增長而起多儲蓄以購買房地產的想法，並同時減少對很多高級商品(如高貴的名牌皮包)的購

買與支出，此時所有這些高貴的商品依現代經濟學的定義對我而言都會變成劣等品，這顯然與我對它們還是正常的高貴商品的想法是完全矛盾的。從而除非萬萬不得已，否則我們沒有合宜的理由放棄立基正常的心理現象的劣等品定義，但在當前主流的個體序數效用理論的確是毫無選擇餘地地必須放棄以此正常心理的劣等品定義來建構經濟理論的發展路徑。

如果你平常沒有很細心地關注主流經濟學的基礎經濟概念合不合理，只是在受教育的過程中，不斷被訓練成在既定的分析架構下進行愈來愈複雜的解謎工作的高手，則你可能一直沒有清楚地發覺現代經濟理論所採用的劣等品定義的確是很怪異的。若真如此，不要訝異，我認識的經濟學者很少人，其實，我應該誠實地說，沒有人會注意到此怪異性。

為什麼教科書會這樣處理劣等品問題呢？這到底是為什麼?為什麼這麼自然的、正常的、熟悉的習慣性概念在現代主流經濟學理論中是無意義的概念呢？若要在「預算限制下極大化總效用」的分析架構裡，救回「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」，可以怎樣做呢？並且，要因此付出怎樣的代價呢？

言簡意賅地說，Hicks-Allen 在 1930 年代發起需求理論革命，起因於他們發現當時經濟學家所採用的「邊際效用遞減法則」與「交叉邊際效用為正是互補性的定義」等依據總效用的二次微分項正負的概念，與得自 Pareto 發現的無異曲線的序數效用概念無法相容。要建構一套效用不可衡量或效用只能排序的進步的序數效用的個體選擇理論，就必須放棄建立在總效用的二次微分項正負的「邊際效用遞減法則」與「交叉邊際效用為正是互補性的定義」等正常概念。

同理，因為「所得提高降低商品邊際效用為劣等品的定義」也是立基於總效用的二次微分項正負的概念，因此，在序數總效用的理論大旗下，這樣的劣等品定義也無容身之地。有些經濟學家主張以效用可衡量的基數效用理論來挽救總效用的二次微分項正負的經濟意義，但也有很多學者反對，認為應用效用可衡量的基數理論是一種走回頭路的很不切實際的作為。

在接下來的分析中，我將運用五種數學表述方式，說明「所得提高商品邊際效用降低為劣等品，所得提高商品邊際效用增加為正常品，所得提高商品邊際效用維持不變為中立品」的定義，在現代序數與基數兩種主要效用理論中的尷尬角色，以彰顯為何「所

得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」在這兩種效用理論之中難覓合宜的棲身之所的關鍵原因。

2. 序數理論與所得提高商品邊際效用降低的劣等品定義是先天宿敵

序數效用的「第一個假設」是經濟個體有能力對不同選項組合進行偏好或對應的效用數值的大小排序。一個序數效用函數經過任何正向單調轉換後，所對應的新函數還是可以維持與代表原來的偏好次序。但單調轉換前後的效用函數所各自對應的二次導數(二次微分項)的正負符號無法維持恆定不變，所以在序數效用理論的架構中無法提供「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」有任何表現的機會。

我們應用一些簡單的數字性、方程式與數學模型，清楚地呈現這些相關的論述的核心精神。

2.1 特殊數據性的例子

我先舉一個相當容易理解的數據性例子,說明為何交叉邊際效用的劣等品定義與序數效用的核心概念是先天宿敵的緣故。

如果你對(5 顆蘋果，m 元現金)的偏好超過(4 顆蘋果，m 元現金)，對(4 顆蘋果，m 元現金)的偏好超過(3 顆蘋果，m 元現金)，對(3 顆蘋果，m 元現金)的偏好超過(2 顆蘋果，m 元現金)，對(2 顆蘋果，m 元現金)的偏好超過(1 顆蘋果，m 元現金)。你可以用由小而大的(1,2,3,4,5)的總效用數列來表示上述的偏好次序，此時蘋果的邊際效用為(1,1,1,1)。

現在因故你的現金由 m 元增加到 $\hat{m}$ 元，而你對(5 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)的偏好超過(4 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)，對(4 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)的偏好超過(3 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)，對(3 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)的偏好超過(2 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)，對(2 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)的偏好超過(1 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)。此時，你可以用由小而大的(2,3,4,5,6)的總效用數列來表示上述的偏好次序，此時蘋果的邊際效用為(1,1,1,1)。

為獲得現金變動前後蘋果邊際效用的變化情況，即交叉邊際效用數值的正負，我們必須比較現金由 m 增加到 $\hat{m}$ 前後兩個蘋果邊際效用的變化方向，現金變動前的原先總效用數列(1,2,3,4,5)對應的蘋果邊際效用為(1,1,1,1)，現金變動後總效用數列(2,3,4,5,6)

對應的蘋果邊際效用還是為(1,1,1,1)，(現金-蘋果的)交叉邊際效用是後一個邊際效用數列(1,1,1,1)減前一個邊際效用數列(1,1,1,1)而得到(0,0,0,0)，即(現金-蘋果的)交叉邊際效用為零。在「所得提高商品邊際效用降低為劣等品，所得提高商品邊際效用增加為正常品，所得提高商品邊際效用維持不變為中立品」的定義之下，這隱含此商品為中立品。

現在我們準備好了，可以對現金增加前後所構成的總效用數列，即現金變動前的原先總效用數列(1,2,3,4,5)與現金變動後總效用數列(2,3,4,5,6)，進行**正向單調轉換**，以檢視此總效用數列所對應(所得-需求數量)的交叉邊際效用為零(商品為中立品)的特性，在**正向單調轉換**之後會發生改變或維持恆定？以判斷「所得提高商品邊際效用降低為劣等品，所得提高商品邊際效用增加為正常品，所得提高商品邊際效用維持不變為中立品」的定義，是否具有單調轉換後能維持不變的序數效用的基本特性。

首先，若我們對原兩個總效用數列(1,2,3,4,5)與(2,3,4,5,6)，進行取平方數的正向單調轉換，使它們變成(1,4,9,16,25)與(4,9,16,25,36)。此時，兩者對應的邊際效用分別變成(3,5,7,9)與(5,7,9,11)。

接著，我們也準備好了，可以檢視正向單調轉換(在此為取平方數)前後，兩種總效用數列原先所對應(所得-需求數量)的交叉邊際效用為零(商品為中立品)的特性，是否會發生改變或維持恆定呢？

此時我們必須比較單調轉換下現金由 m 元增加到 $\hat{m}$ 元前後兩個蘋果邊際效用的變化方向，單調轉換下現金變動前的總效用數列(1,4,9,16,25)對應的蘋果邊際效用為(3,5,7,9)，現金變動後總效用數列(4,9,16,25,36)對應的蘋果邊際效用為(5,7,9,11)，(現金-蘋果的)交叉邊際效用是後一個邊際效用數列(5,7,9,11)減前一個邊際效用數列(3,5,7,9)而得到(2,2,2,2)，即(現金-蘋果的)交叉邊際效用為正。這隱含在「所得提高商品邊際效用降低為劣等品」等心理定義之下，此商品為正常品。也就是，經過正向單調轉換(在此為取平方數)後，對於同一個人，即對於同一偏好的相同的人，蘋果對他而言從效用函數轉換前的所得中立品，變成效用函數轉換後的所得正常品。這當然是不可接受的理論轉變或突變，所以說「所得提高商品邊際效用降低為劣等品」等定義，與序數效用的效用數值只能排序大小的核心理念是不能並存的定義。

其次，若我們對原兩個總效用數列(1,2,3,4,5)與(2,3,4,5,6)，進行取開根號的單調轉換，使它們變成$(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5})$與$(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6})$。此時，兩者對應的邊際效用分別

變成($\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{4}-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}-\sqrt{4}$)與($\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{4}-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}-\sqrt{4}$, $\sqrt{6}-\sqrt{5}$)，即接近(0.4142, 0.3178, 0.2679, 0.2361)和(0.3178, 0.2679, 0.2361, 0.2134)。

此時我們再次準備好了，可以檢視正向單調轉換(在此為取開根號)前後，兩種總效用數列原先所對應(所得-需求數量)的交叉邊際效用為零(商品為中立品)的特性，是否會發生改變或維持恆定呢？

我們必須比較單調轉換下現金由 m 元增加到 $\hat{m}$ 元前後兩個蘋果邊際效用的變化方向，單調轉換下現金變動前的總效用數列(1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$)對應的蘋果邊際效用為($\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{4}-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}-\sqrt{4}$)，現金變動後總效用數列($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$)對應的蘋果邊際效用是($\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{4}-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}-\sqrt{4}$, $\sqrt{6}-\sqrt{5}$),(現金-蘋果的)交叉邊際效用是後一個邊際效用數列($\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{4}-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}-\sqrt{4}$, $\sqrt{6}-\sqrt{5}$)減前一個邊際效用數列($\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sqrt{4}-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}-\sqrt{4}$)而得到($\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1$, $\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3}$, $\sqrt{6}-2\sqrt{5}+\sqrt{4}$)，此數列數據接近(-0.0946, -0.0500, -0.0319, -0.0227)，即(現金-蘋果的)交叉邊際效用為負。這隱含在「所得提高商品邊際效用降低為劣等品」等的心理定義之下，此商品為劣等品。也就是，經過正向單調轉換(在此為取開根號)後，對於同一個人，即對於同一偏好的相同的人，蘋果對他而言從所得的中立品變成所得的劣等品。這當然是不可接受的理論特性轉變或突變，所以我們說「所得提高商品邊際效用降低為劣等品」等定義，與序數效用的效用數值只能排序大小的核心理念是不能並存的，序數總效用理論因此是一個連簡單的心理法則都無法涵蓋的有嚴重缺陷的理論。

以上的舉例，清楚地展現可以用來描述相同偏好關係的不同新總效用數列，分別對應的交叉邊際效用正負符號，有些為零、有些是正、有些是負。從而交叉邊際效用正負的概念，無法維持恆定。建立在其上的劣等品定義，變得很尷尬，而顯得無處容身。這些概念在序數效用理論總效用數字只有大小次序有意義的主要大旗下，變成一種沒有恆定立場的幻想式、或變幻多端而難以掌握的概念，甚至會被認為是一種無意義的且不科學的錯誤的思維方式。

這表示如果不放棄「所得提高商品邊際效用降低為劣等品」等定義，則隱含「代表同一偏好的不同總效用數列有些呈現劣等品、有些呈現中立品、有些呈現正常品」的特性，這顯然是一項互相矛盾而無法令人接受的論述。如果保留「所得提高商品邊際效用降低為劣等品」等定義，則等於要放棄效用只能排序大小的「序數效用」的核心精神。

「所得提高商品邊際效用降低為劣等品定義」與序數效用理論的「序數」的核心理念因而是無法相容的概念，這清清楚楚地展現了為何所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義與序數總效用概念是先天宿敵的基本關鍵。

2.2 一般化效用函數形式

以一般化的數學方程式進行分析，可以更完整周全地呈現為何「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」與序數總效用概念是先天宿敵的根本癥結。我們先寫下正向單調轉換的關係式為：

(1) $$V(x,m)=F(U(x,m));\quad F'>0, F''\gtrless 0$$

其中，x 和 m 是消費者所面對的兩個選項。我們以 x 表示商品 x 的數量，而 m 表示現金或所得的多寡。$U(x,m)$ 與 $V(x,m)$ 是用來描述消費者對不同數量的選項組合 (x,m) 的偏好關係的總效用函數。$U(x,m)$ 是原先的總效用函數，而 $V(x,m)$ 為藉由 $F(U)$ 的正向單調轉換後所得到的新的總效用函數。正向單調轉換的特性反映在轉換函數 $F(U)$ 的一階導數為正 $F'(U)>0$ 的設定上。二階導數的正負則完全不會影響單調正向轉換後效用數值大小排列次序不變的特性，所以 $F''\gtrless 0$。單調正向轉換前後的總效用數列數據的大小次序相同，$U(x,m)$ 與 $V(x,m)$ 因此代表相同的偏好，這是序數效用理論的基本教條。事實上，可以用來描述同一偏好的總效用數列有無窮多個，每一個又都可以進行無窮多種的正向單調轉換，因此序數效用具有一種非常低程度的效用可衡量性，準確地說，這是一種「序數可衡量」(ordinal measurability)的概念。

對總效用 $U(x,m)$ 進行正向單調轉換使它變成 $V(x,m)$ 之後，會衍生出以下的關係式：

(2) $$V_x=F'U_x,\ V_m=F'U_m$$

(3) $$V_{xx}=F'U_{xx}+F''U_xU_x,\ V_{mm}=F'U_{mm}+F''U_mU_m$$

(4) $$V_{xm}=F'U_{xm}+F''U_xU_m,\ V_{mx}=F'U_{mx}+F''U_mU_x$$

因為 $F''\gtrless 0$ 皆可，若原總效用函數 $U_{xx}<0$ 邊際效用遞減，但在 $F''\gtrless 0$ 的條件下，則新總效用函數可以 $V_{xx}\gtrless 0$，即新的邊際效用可以是遞減、常數或遞增。換句話說，我們可以獲得 $signV_{xx}\neq signU_{xx}$、$signV_{mm}\neq signU_{mm}$ 的結果，即正向單調轉換前後的總效用函數所對應的純粹二階導數的數值正負符號可能不同。邊際效用遞減與序數效用概念因此是互相

排斥的概念。

同理，在此，我們關注的焦點是 $signV_{xm} \neq signU_{xm}$ 、 $signV_{mx} \neq signU_{mx}$ 的結果，即正向單調轉換前後的總效用函數所對應的交叉二階導數的數值正負符號可能不同。因此「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」與序數效用概念彼此是天敵無法共存。

2.3 特殊效用函數形式

為加深不熟悉此研究題材讀者的印象，再加碼以三個特殊的效用函數來加以解釋。這是對教學很有幫助的論述技巧。當上課的學生們與聽演講的老師們，做過以下的練習了解以上的內容的意義之後，就會由對關於舊理論有缺陷的批評及由滿臉狐疑，直接轉變為不斷點頭稱是的 180 度立場大轉變。

我所設計的三個特殊的效用函數分別是：

(5-A) $U^1(x,m) = xm$

(5-B) $U^2(x,m) = \ln xm = \ln x + \ln m$

(5-C) $U^3(x,m) = (\ln x + \ln m)^{1/2}$

這三個效用函數所對應的邊際效用雖然數值大小可能不同，但都是正值，它們分別是：

(6-A) $U_x^1 = m > 0$, $U_m^1 = x > 0$；邊際效用為正

(6-B) $U_x^2 = \dfrac{1}{x} > 0$, $U_m^2 = \dfrac{1}{m} > 0$；邊際效用為正

(6-C) $U_x^3 = \dfrac{1}{2x}(\ln x + \ln m)^{-\frac{1}{2}} > 0$, $U_m^3 = \dfrac{1}{2m}(\ln x + \ln m)^{-\frac{1}{2}} > 0$；邊際效用為正

它們所對應的邊際效用的變化方向，分別是常數或遞減：

(7-A) $U_{xx}^1 = 0$, $U_{mm}^1 = 0$；邊際效用常數

(7-B) $U_{xx}^2 = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, $U_{mm}^2 = -\dfrac{1}{m^2} < 0$；邊際效用遞減

(7-C) $$U_{xx}^3=-\frac{1}{2x^2}(\ln x+\ln m)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4x^2}(\ln x+\ln m)^{-\frac{3}{2}}<0$$,

$$U_{mm}^3=-\frac{1}{2m^2}(\ln x+\ln m)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4m^2}(\ln x+\ln m)^{-\frac{3}{2}}<0$$ ；邊際效用遞減

這三個效用函數彼此是彼此的單調轉換函數，背後所表示的偏好次序是不變的，但其中一個的邊際效用變化率是常數，另外兩個是遞減。

它們所對應的交叉邊際效用正負，分別是：

(8-A) $U_{xm}^1=1>0$, $U_{mx}^1=1>0$ ；交叉邊際效用為正(正常品)

(8-B) $U_{xm}^2=0$, $U_{mx}^2=0$ ；交叉邊際效用為零(中立品)

(8-C) $$U_{xm}^3=-\frac{1}{4xm}(\ln x+\ln m)^{-\frac{3}{2}}<0,$$

$$U_{mx}^3=-\frac{1}{4xm}(\ln x+\ln m)^{-\frac{3}{2}}<0$$ ；交叉邊際效用為負(劣等品)

這三個彼此是彼此的單調轉換的效用函數，所對應的選項組合的總效用數值次序維持不變，但其中一個的交叉邊際效用是正、一個是零、一個是負。

我們因此再次展示了用來表示同樣偏好的不同總效用函數，分別各自對應的純粹與交叉二次微分項的正負符號可能有所不同。這表示若我們採取「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」，則單調轉換後商品的正常品、中立品與劣等品的性質無法維持恆定。這種正常品、中立品與劣等品的定義在序數效用理論中變成不合宜的方式。

2.4 特殊效用函數的決策模型

接著，以大家非常熟悉的「消費者在預算限制下極大化總效用」的三個特殊模型，呈現與說明序數效用單調轉換性質所衍生的進一步涵義，這三個模型分別是：

(9-A) $$\max_{x,m}\quad U^1(x,m)=xm\quad s.t.\quad px+qm=px+m=M;\quad q=1$$

(9-B) $$\max_{x,m}\quad U^2(x,m)=\ln xm=\ln x+\ln m\quad s.t.\quad px+m=M$$

(9-C) $$\max_{x,m} \quad U^3(x,m)=(\ln x+\ln m)^{1/2} \quad s.t. \quad px+m=M$$

我們已經知道，這三個模型的邊際效用雖然數值不同但其正負符號都是正值，然而它們所對應的純粹的邊際效用變化方向和交叉邊際效用正負有所不同。

在另一方面，這三個模型所對應的邊際替代率卻又是完全一樣的，它們分別是：

(10-A) $$MRS_{xm}^1=\frac{U_x^1}{U_m^1}=\frac{m}{x}$$

(10-B) $$MRS_{xm}^2=\frac{U_x^2}{U_m^2}=\frac{1/x}{1/m}=\frac{m}{x}$$

(10-C) $$MRS_{xm}^3=\frac{U_x^3}{U_m^3}=\frac{\frac{1}{2x}(\ln x+\ln m)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2m}(\ln x+\ln m)^{-\frac{1}{2}}}=\frac{m}{x}$$

也就是說，即使單調轉換前後的效用函數所各自對應的邊際效用的數值大小可能不同，各自對應的純粹邊際效用的正負(遞增、遞減或常數)與交叉邊際效用正負(正數、零或負數)也可能不同。但是，邊際替代率或邊際效用的比值，不會因為效用函數經過單調轉換而發生任何變化。

並且，這三個模型的預算限制式完全一樣，因此，相同的邊際替代率自然隱含消費者最適化的一階條件，也完全一樣。即：

(11) $$MRS_{xm}^i=\frac{m}{x}=p,\ \ i=1,2,3\ ;\ \ px+m=M$$

因為三個消費者選擇模型的邊際替代率完全一樣，三個模型最適化的二階條件也完全一樣，無異曲線凸向原點的條件會成立，即 $\partial MRS_{xm}^i/\partial x=[x(\partial m/\partial x)-m(\partial x/\partial x)]/x^2=[x(-m/x)-m]/x^2=-2m/x^2<0$。

簡單的計算，可以了解在這三個不同模型中，所獲得的需求函數的形式也完全一樣，即：

(12) $$x^* = \frac{1}{2}\frac{M}{p}$$

(13) $$m^* = \frac{1}{2}\frac{M}{q} = \frac{M}{2}$$

分析至此，我們發現，在三個模型的效用函數彼此為彼此的正向單調轉換函數的前提下，因為單調轉換前後的效用函數不會改變偏好次序，即單調轉換前後的效用數值的相對大小不會發生改變，此時消費者均衡條件完全一樣，最適解(需求函數)完全一樣，表示同樣的消費決策與購買行為。雖然，不熟悉這項序數效用理論特色的讀者，會感到驚訝與特別關注的發現是：三個不同模型的交叉邊際效用一個正數、一個零、一個負數；並且邊際效用變化率一個為常數且兩個是遞減。但這些怪異的不一致性質似乎是無關緊要的小插曲，因為看來我們已經能夠非常成功地描繪消費者選擇的最適均衡條件與最適選擇後果(實際購買數量)了。

2.5 一般化效用函數的決策模型

在此小節中，我們以一般化的消費者選擇模型來更準確且周全地討論上述的分析結果。此時，我們可以假設，一位擁有財富或所得水準 M 元的消費者，在面對單位價格是 p 元的 x 商品時，於 Slutsky-Hicks 的消費模型之下，如何決定購買多少數量的 x 商品以及保留多少現金 m 。

「消費者在預算限制下極大化總效用」的決策或思維方式，設定如下：

(14) $$\max_{x,m} \quad U(x,m); \quad U_x > 0, U_m > 0, \;\; s.t. \quad px + m = M$$

最適化的一階條件要求：

(15) $$\frac{U_x(x,m)}{U_m(x,m)} = p$$

(16) $$px + m = M$$

二階條件要求無異曲線凸向原點，即：

(17) $$H = U_{xx} - 2pU_{xm} + p^2 U_{mm} < 0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：

(18) $$x_M = \frac{U_{xm} - pU_{mm}}{-H} \gtreqless 0$$

(19) $$m_M = \frac{pU_{xm} - U_{xx}}{-H} \gtreqless 0$$

價格變動對購買數量的效果為：

(20) $$x_p = \frac{U_m}{H} + x\frac{U_{xm} - pU_{mm}}{H} \gtreqless 0$$

(21) $$m_p = -\frac{U_x}{H} + x\frac{pU_{xm} - U_{xx}}{H} \gtreqless 0$$

正向單調轉換後的 Slutsky-Hicks 消費模型變成：

(22) $$\max_{x,m} \quad V(x,m) = F(U(x,m)); \quad F' > 0\,, \;\; s.t. \quad px + m = M$$

最適化的一階條件要求：

(23) $$\frac{V_x(x,m)}{V_m(x,m)} = p$$

(24) $$px + m = M$$

二階條件要求無異曲線凸向原點，即：

(25) $$J = V_{xx} - 2pV_{xm} + p^2 V_{mm} < 0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：

(26) $$x_M = \frac{V_{xm} - pV_{mm}}{-J} \gtreqless 0$$

(27) $$m_M = \frac{pV_{xm} - V_{xx}}{-J} \gtreqless 0$$

價格變動對購買數量的效果為：

(28) $$x_p = \frac{V_m}{J} + x\frac{V_{xm} - pV_{mm}}{J} \gtreqless 0$$

(29) $$m_p = -\frac{V_x}{J} + x\frac{pV_{xm} - V_{xx}}{J} \gtrless 0$$

接著，我們證明單調正向轉換前後的分析結果會一樣。首先，單調正向遞增轉換前後的最適化一階條件完全相同，因為：

(30) $$\frac{V_x}{V_m} = \frac{F'U_x}{F'U_m} = \frac{U_x}{U_m} = p$$

這表示單調正向遞增轉換後的最適化條件不變，即最適解的數值不變。

其次，由無異曲線分析法的基本特性來看，單調正向轉換前後的效用函數表示相同的偏好，所獲得的分析結果(總結果)應該一樣才對。所以，我們應該可以證明單調正向轉換前後兩個模型的比較靜態分析的總效果或最後的結果會完全相同。

這證明過程非常簡單，將式(2)-(4)代入相關方程式中，我們就可以證得它們各自所得變動對購買數量的效果相等，即：

(31) $$x_M = \frac{V_{xm} - pV_{mm}}{-J} = \frac{U_{xm} - pU_{mm}}{-H}$$

(32) $$m_M = \frac{pV_{xm} - V_{xx}}{-J} = \frac{pU_{xm} - U_{xx}}{-H}$$

價格變動對購買數量的效果也會相等：

(33) $$x_p = \frac{V_m}{J} + x\frac{V_{xm} - pV_{mm}}{J} = \frac{U_m}{H} + x\frac{U_{xm} - pU_{mm}}{H}$$

(34) $$m_p = -\frac{V_m}{J} + x\frac{pV_{xm} - V_{xx}}{J} = -\frac{U_m}{H} + x\frac{pU_{xm} - U_{xx}}{H}$$

其中，可證明 $J = V_{xx} - 2pV_{xm} + p^2V_{mm} = F'H < 0$ 。

因此我們藉由數學證明可發現總效用函數經過單調正向轉換後，不會影響消費者的均衡條件，也不會影響比較靜態分析的整體的或最後的結果。這就驗證了無異曲線分析法的基本特性，也就是單調正向轉換前後的效用函數，代表相同的個人偏好。既然是代表相同的偏好，因此也應該隱含相同的個人行為。

就如 Varian (1996) 所強調的：「在幾何上，一項效用函數是一種標記無異曲線的方

法。因為在同一條無異曲線上的每個組合一定具有相同的效用，一個效用函數是以位置愈高的無異曲線得到愈大的指定數字的方式來指定給不同的無異曲線不同的數字。從此觀點來看，單調轉換只是重新標記無異曲線。只要包含愈喜歡商品組合的無異曲線比包含愈不喜歡商品組合的無異曲線得到一個較大的標記，則這些標記都將會代表相同的偏好。」[2]也因此不會改變消費者的最佳決策。

2.6 進步的完美理論或不合常識的錯誤理論

這一切看起來很完美，序數效用理論看來似乎就足夠建構出合理的消費理論了。

因此有些經濟學家認為既然拋棄邊際效用遞減法則與「所得提高商品邊際效用降低為劣等品」定義，序數效用理論還是足以獲得一致性的消費者均衡條件與建構完整的消費理論，序數效用理論當然是足夠好的理論。邊際效用遞減法則與「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」等概念，因此是多餘的、無意義的概念。更何況邊際效用遞減法則與「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」是一些立基於不可客觀觀察的心理法則的概念，棄置不可觀察的主觀心理法則，應該被認為是一種理論進步的象徵。

然而，事實上，有很多經濟學家不同意這種看法，他們認為邊際效用遞減法則與「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」等概念，是古典經濟學前輩的理論的精華與核心精神，是一些合情合理的心理現象，也是一個正常的合乎常理的經濟理論必須能涵蓋的基本生活常識。

有些經濟學家為克服序數效用這些缺點，於是轉身主張不同的效用概念—基數效用理論。

3. 基數理論對所得提高商品邊際效用降低為劣等品定義代價昂貴的救援

基數效用的**「最基本主張」**是個人有能力對不同選項組合與任何兩個選項組合的變化進行偏好或效用排序。一個基數效用函數經過任何正向線性轉換後所獲得的新函數可

2 Geometrically, a utility function is a way to label indifference curves. Since every bundle on an indifference curve must have the same utility, a utility function is a way of assigning numbers to the different indifference curves in a way that higher indifference curves get assigned larger numbers. Seen from this point of view a monotonic transformation is just a relabeling of indifference curves. As long as indifference curves containing more-preferred bundles get a larger label than indifference curves containing less-preferred bundles, the labeling will represent the same preferences.

以描述相同的偏好次序，正向線性轉換前後不同的總效用的二次微分項的正負符號維持不變，因此可以接納「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」的存在。

在本節中，我就再次運用對應的五種數學表述方式，來說明「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」在基數效用理論中所扮演的角色，以及所衍生的一些特性與爭議。

3.1 數據性例子

先以一個簡單易懂的數據性例子，說明為何基數效用理論可以提供「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」一處如針尖般狹小的立錐之地的棲身之所的原因。

如前所述，如果你對(5 顆蘋果，m 元現金)的偏好超過(4 顆蘋果，m 元現金)，後者的偏好又超過(3 顆蘋果，m 元現金)，又超過(2 顆蘋果，m 元現金)，又超過(1 顆蘋果，m 元現金)。你可以用由小而大的(1,2,3,4,5)的總效用數列來表示上述的偏好次序，此時蘋果邊際效用為(1,1,1,1)。現在因故你的現金由 m 元增加到 $\hat{m}$ 元，而你對(5 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)的偏好超過(4 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)，後者的偏好又超過(3 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)，又超過(2 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)，又超過(1 顆蘋果，$\hat{m}$ 元現金)。此時，你可以用由小而大的(2,3,4,5,6)的總效用數列來表示上述的偏好次序，此時蘋果邊際效用為(1,1,1,1)。

為獲得現金變動前後蘋果邊際效用的變化情況，即交叉邊際效用的數值正負，我們必須比較現金由 m 元增加到 $\hat{m}$ 元前後兩個數列的蘋果邊際效用的變化方向，現金變動前的原先總效用數列(1,2,3,4,5)對應的蘋果邊際效用為(1,1,1,1)，現金變動後總效用數列(2,3,4,5,6)對應的蘋果邊際效用還是為(1,1,1,1)，(現金-蘋果的)交叉邊際效用是後一個邊際效用數列(1,1,1,1)減前一個邊際效用數列(1,1,1,1)而得到(0,0,0,0)，即(現金-蘋果的)交叉邊際效用為零。在「所得提高商品邊際效用降低為劣等品，所得提高商品邊際效用增加為正常品，所得提高商品邊際效用維持不變為中立品」的定義之下，這隱含此商品為中立品。

現在我們準備好了，可以對現金增加前後所構成的總效用數列，即現金變動前的原先總效用數列(1,2,3,4,5)與現金變動後總效用數列(2,3,4,5,6)，進行**正向線性轉換**，以檢視此總效用數列所對應(所得-需求數量)的交叉邊際效用為零(商品為中立品)的特性，會發生改變或維持恆定？以判斷「所得提高商品邊際效用降低為劣等品」等定義，能否符

合基數效用**正向線性轉換**後相關性質維持不變的特性。

若我們對原兩個總效用數列(1,2,3,4,5)與(2,3,4,5,6)，進行乘以一個正的常數$\alpha > 0$再加上一個常數$\beta \gtreqless 0$的**正向線性轉換**，使它們變成$(\alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 4\alpha+\beta, 5\alpha+\beta)$與$(2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 4\alpha+\beta, 5\alpha+\beta, 6\alpha+\beta)$。此時，兩者對應的邊際效用分別變成$(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$與$(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$。

現在可以檢視**正向線性轉換**(在此為乘以一個正的常數$\alpha > 0$再加上一個常數$\beta \gtreqless 0$)前後，先後兩種總效用數列所對應(所得-需求數量)的交叉邊際效用為零(商品為中立品)的特性，會發生改變或維持恆定了。

我們必須比較單調轉換下現金由m元增加到$\hat{m}$元前後兩個蘋果邊際效用的變化方向，單調轉換下現金變動前的原先總效用數列$(\alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 4\alpha+\beta, 5\alpha+\beta)$對應的蘋果邊際效用為$(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$，現金變動後總效用數列$(2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 4\alpha+\beta, 5\alpha+\beta, 6\alpha+\beta)$對應的蘋果邊際效用還是為$(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$，(現金-蘋果的)交叉邊際效用是後一個邊際效用數列$(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$減前一個邊際效用數列$(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$而得到(0,0,0,0)，即(現金-蘋果的)交叉邊際效用為零。這隱含此商品還是中立品。也就是，經過**正向線性轉換**後，對於同一個人，即對於同一偏好的相同的人，蘋果對他而言在效用函數正向線性轉換前是所得的中立品，在效用函數正向線性轉換之後還是維持中立品的性質。

簡單地說，正向線性轉換後不會改變基數效用的交叉邊際效用的正負性質，基數效用因此能找回被序數效用趕出家門的「所得提高商品邊際效用降低的劣等品定義」。

3.2 一般化效用函數形式

我們接著以一般化的數學式，說明只能進行正向線性轉換的基數效用理論的性質。若我們對總效用$U(x,m)$進行正向線性轉換使它變成$V(x,m)$，如：

$$V(x,m) = \alpha U(x,m) + \beta; \quad \alpha > 0, \quad \beta \gtreqless 0 \qquad (35)$$

線性轉換的性質反映在α與β都是常數性質，正向轉換的性質反映在$\alpha > 0$的設定上。而β的正負只會影響「零標記」的位置，不會影響效用數值轉換前後的相對距離，所以$\beta \gtreqless 0$皆可。此時，$U(x,m)$與$V(x,m)$代表相同的基數效用偏好(總效用數列數值的大小次序與總效用差值的數列的數據大小次序同時維持相同)，這會衍生出以下的關係式：

(36) $V_x = \alpha U_x$, $V_m = \alpha U_m$

(37) $V_{xx} = \alpha U_{xx}$, $V_{mm} = \alpha U_{mm}$

(38) $V_{xm} = \alpha U_{xm}$, $V_{mx} = \alpha U_{mx}$

相對於序數效用理論在正向單調轉換之下總效用的二次微分項不能維持固定不變的性質，現在我們得到 $signV_{ij} = signU_{ij}$ 的結果，其中 $i, j = x, m$。因此，在基數效用理論效用函數只能進行正向線性轉換的概念下，可救回被序數效用理論所拋棄的常識性的「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」等概念。

3.3 特殊效用函數形式

再將前文採用的三個特殊的效用函數進行正向線性轉換，然後繼續探討其相關性質。三個特殊的效用函數分別是：

(39-A) $V^1(x,m) = \alpha xm + \beta$

(39-B) $V^2(x,m) = \alpha \ln xm + \beta = \alpha(\ln x + \ln m) + \beta$

(39-C) $V^3(x,m) = \alpha(\ln x + \ln m)^{1/2} + \beta$

這三個特殊效用函數分別是(5-A)的 $V^1(x,m) = xm$ 、(5-B)的 $V^2(x,m) = \ln xm = \ln x + \ln m$ 、以及(5-C)的 $V^3(x,m) = (\ln x + \ln m)^{1/2}$ 效用函數的正向線性轉換 $V(x,m) = \alpha U(x,m) + \beta$ 函數。

這三個效用函數的邊際效用分別是：

(40-A) $V_x^1 = \alpha m > 0$, $V_m^1 = \alpha x > 0$；邊際效用為正

(40-B) $V_x^2 = \dfrac{\alpha}{x} > 0$, $V_m^2 = \dfrac{\alpha}{m} > 0$；邊際效用為正

(40-C) $V_x^3 = \dfrac{\alpha}{2x}(\ln x + \ln m)^{-\frac{1}{2}} > 0$, $V_m^3 = \dfrac{\alpha}{2m}(\ln x + \ln m)^{-\frac{1}{2}} > 0$；邊際效用為正

比較正向線性轉換前後的總效用函數所各自對應的邊際效用函數，我們會發現 (6-A)與(40-A)的邊際效用都是正值，(6-B)與(40-B)的邊際效用也都是正值，連(6-C)與(40-C)的邊

際效用都是正值，正向線性轉換不會改變邊際效用的正負符號。

三個效用函數所對應的邊際效用是常數、遞減或遞增的情況，分別是：

(41-A) $V_{xx}^{1}=0$, $V_{mm}^{1}=0$；邊際效用常數

(41-B) $V_{xx}^{2}=-\dfrac{\alpha}{x^{2}}<0$, $V_{mm}^{2}=-\dfrac{\alpha}{m^{2}}<0$；邊際效用遞減

(41-C) $V_{xx}^{3}=-\dfrac{\alpha}{2x^{2}}(\ln x+\ln m)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{\alpha}{4x^{2}}(\ln x+\ln m)^{-\frac{3}{2}}<0$,

$V_{mm}^{3}=-\dfrac{\alpha}{2m^{2}}(\ln x+\ln m)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{\alpha}{4m^{2}}(\ln x+\ln m)^{-\frac{3}{2}}<0$；邊際效用遞減

比較正向線性轉換前後的總效用函數所各自對應的純粹二次微分項，我們會發現 (7-A)與(41-A)的邊際效用都是常數，(7-B)與(41-B)的邊際效用都是遞減，(7-C)與(41-C)的邊際效用都是遞減，正向線性轉換因此也不會改變純粹邊際效用變化方向的正負。

它們所對應的交叉邊際效用正負變成：

(42-A) $V_{xm}^{1}=\alpha>0$, $V_{mx}^{1}=\alpha>0$；交叉邊際效用為正

(42-B) $V_{xm}^{2}=0$, $V_{mx}^{2}=0$；交叉邊際效用為零

(42-C) $V_{xm}^{3}=-\dfrac{\alpha}{4xm}(\ln x+\ln m)^{-\frac{3}{2}}<0$, $V_{mx}^{3}=-\dfrac{\alpha}{4xm}(\ln x+\ln m)^{-\frac{3}{2}}<0$；交叉邊際效用為負

比較正向線性轉換前後的總效用函數所各自對應的交叉二次微分項，我們會發現 (8-A)與(42-A)的交叉邊際效用都是正，(8-B)與(42-B)的交叉邊際效用都是零，(8-C)與(42-C)的交叉邊際效用都是負，正向線性轉換不會改變交叉邊際效用正負符號。

3.4 特殊效用函數的決策模型

接著在「消費者在預算限制下極大化總效用的分析架構」之下，分析這三個特殊效用函數所隱含的一些特性，這三個分別對應於(9-A)-(9-C)的決策模型是：

(43-A) $$\max_{x,m} \quad V^1(x,m) = \alpha xm + \beta \quad s.t. \quad px + m = M$$

(43-B) $$\max_{x,m} \quad V^2(x,m) = \alpha \ln xm + \beta = \alpha(\ln x + \ln m) + \beta \quad s.t. \quad px + m = M$$

(43-C) $$\max_{x,m} \quad V^3(x,m) = \alpha(\ln x + \ln m)^{1/2} + \beta \quad s.t. \quad px + m = M$$

由以上的分析已知，這三個模型的邊際效用雖然數值不同但其正負符號都是正值，它們所對應的純粹與交叉邊際效用正負則有所不同。

這三個模型所對應的邊際替代率分別是：

(44-A) $$MRS^1_{xm} = \frac{V^1_x}{V^1_m} = \frac{\alpha m}{\alpha x} = \frac{m}{x}$$

(44-B) $$MRS^2_{xm} = \frac{V^2_x}{V^2_m} = \frac{\alpha / x}{\alpha / m} = \frac{m}{x}$$

(44-C) $$MRS^3_{xm} = \frac{V^3_x}{V^3_m} = \frac{\frac{\alpha}{2x}(\ln x + \ln m)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{\alpha}{2m}(\ln x + \ln m)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{m}{x}$$

以上式子顯示三個不同模型的邊際替代率完全一樣，並且分別與各自所對應的正向線性轉換前的效用函數的邊際替代率(10-A)-(10-C)也完全一樣，因此正向線性轉換前後的總效用函數所各自對應的邊際替代率是維持不變的。

最適化的一階條件也完全一樣：

(11-D) $$MRS^i_{xm} = \frac{m}{x} = p, \; i = 1,2,3 \quad px + m = M$$

因為邊際替代率完全一樣，最適化的二階條件也完全一樣，即無異曲線凸向原點的二階條件成立。

接著，我們可以求出三個不同模型完全一樣的需求函數，即：

(12-D) $$x^* = \frac{1}{2}\frac{M}{p}$$

(13-D) $$m^* = \frac{1}{2}\frac{M}{q} = \frac{M}{2}$$

此需求函數與(12)-(13)中的需求函數長得一模一樣。

簡單地說，前面的三個模型(9-A)-(9-C)式與各自對應的後面的三個模型(43-A)-(43-C)中的效用函數彼此為彼此的正向線性轉換函數，藉由簡單的分析我們發現正向線性轉換非但不會改變效用函數所描繪的偏好次序，即所對應的效用數值的相對大小不會發生改變，消費者均衡條件一樣，最適解(需求函數)一樣，呈現同樣的選擇或消費行為。並且前後對應的三個不同模型不只邊際效用與純粹邊際效用的變化方向的正負符號維持不變，交叉邊際效用的變化方向的正負符號也維持不變：即交叉邊際效用是正數的效用函數正向線性轉換後還是正、交叉邊際效用為零的效用函數正向線性轉換後還是零、交叉邊際效用是負的效用函數正向線性轉換後還是負的。因此所有我們現在關心的模型性質都維持恆定。

3.5 一般化效用函數的決策模型

接著以一般化的消費者決策模型來完整地呈現整個論述，還未進行正向線性轉換的模型分析的過程和結果，都已經記錄在(14)-(21)式中了。在此，我們只需要分析正向線性轉換後的消費者模型。

而正向線性轉換$V(x,m)=\alpha U(x,m)+\beta$後的一般化消費模型變成：

(45) $$\max_{x,m} \quad V(x,m)=\alpha U(x,m)+\beta\,, \quad s.t. \quad px+m=M$$

最適化的一階條件要求：

(46) $$\frac{V_x(x,m)}{V_m(x,m)} = p$$

(47) $$px+m=M$$

二階條件要求無異曲線凸向原點，即：

(48) $$J = V_{xx} - 2pV_{xm} + p^2 V_{mm} < 0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：

(49) $$x_M = \frac{V_{xm} - pV_{mm}}{-J} \gtrless 0$$

(50) $$m_M = \frac{pV_{xm} - V_{xx}}{-J} \gtrless 0$$

價格變動對購買數量的效果為：

(51) $$x_p = \frac{V_m}{J} + x\frac{V_{xm} - pV_{mm}}{J} \gtrless 0$$

(52) $$m_p = -\frac{V_x}{J} + x\frac{pV_{xm} - V_{xx}}{J} \gtrless 0$$

然後，我們可以證明正向線性轉換前後的分析結果會一樣。首先，正向線性轉換前後的最適化一階條件是完全相同的，因為：

(53) $$\frac{V_x}{V_m} = \frac{\alpha U_x}{\alpha U_m} = \frac{U_x}{U_m} = p$$

我們可以證得正向線性轉換前後它們各自所得變動對購買數量效果相等的結果,即:

(54) $$x_M = \frac{V_{xm} - pV_{mm}}{-J} = \frac{\alpha U_{xm} - \alpha p U_{mm}}{-\alpha H} = \frac{U_{xm} - pU_{mm}}{-H}$$

(55) $$m_M = \frac{pV_{xm} - V_{xx}}{-J} = \frac{\alpha p U_{xm} - \alpha U_{xx}}{-\alpha H} = \frac{pU_{xm} - U_{xx}}{-H}$$

價格變動對購買數量的效果也是一樣：

(56) $$x_p = \frac{V_m}{J} + x\frac{V_{xm} - pV_{mm}}{J} = \frac{\alpha U_m}{\alpha H} + x\frac{\alpha U_{xm} - \alpha p U_{mm}}{\alpha H} = \frac{U_m}{H} + x\frac{U_{xm} - pU_{mm}}{H}$$

(57) $$m_p = -\frac{V_x}{J} + x\frac{pV_{xy} - V_{xx}}{J} = -\frac{\alpha U_x}{\alpha H} + x\frac{\alpha p U_{xm} - \alpha U_{xx}}{\alpha H} = -\frac{U_x}{H} + x\frac{pU_{xm} - U_{xx}}{H}$$

其中，可證明 $J = V_{xx} - 2pV_{xm} + p^2 V_{mm} = \alpha H < 0$ 。

藉由上述數學證明，我們發現總效用函數經過正向線性轉換後，不會影響比較靜態

分析的總結果。並且，在基數效用的理念下，「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」是一種可以找到發揮空間的概念。

因此，如果要保留「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」，一個做法是放棄核心精神是效用數值可以進行正向單調轉換的「序數效用」，而改採取效用數值只能進行線性轉換的基數效用即可。

但這是一個完美或完善地解決序數總效用理論缺陷的理論嗎？這毫無疑問是一個更好的理論建構與進步嗎？答案：很明顯地，是不是的。

因為，這樣的做法有所得也有所失。基數效用為救回「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」，必須付出高昂的代價。

正向線性轉換就是公分與公尺等長度概念所具有的基本性質，基數效用正向線性轉換的特性因此隱含個人有能力分辨任何兩個效用差異(類似長度)的比例。此時效用變成一種相當強烈地可衡量的概念，效用可衡量一直被認為是一種落伍的不切實際的標誌。甚至，Samuelson (1938)指出在真實人生中構成基數效用所需添加的假設或公設出現的機率幾乎為零，因此以「無限地不可能的」(infinitely improbable)的極端負面字眼來表達他對基數效用理論的評斷。

3.6 序數效用主義者的主張

分析至此，我們發現序數效用理論與基數效用理論可獲得同樣的消費者行為的預測結果，而序數效用理論的適用範圍大很多或所要求成立的假設非常寬鬆，序數效用理論似乎是比較好的效用理論。

因此，一些序數效用主義者強烈主張，比較序數與基數，兩種所獲得的分析結果一樣，所以採用序數效用是比較好的選擇，並且是最好的選擇。

更詳細地說，任何可以用來表示相同偏好關係的效用函數，也就是任何總效用函數經過任何單調正向轉換後，都不會影響消費者的均衡條件，也都不會影響比較靜態分析的整體的或最後的結果。因此，即使有些總效用函數所對應的邊際效用遞減、有些遞增以及有些不變，以及所對應的交叉邊際效用正負，有些是正、有些是零、有些是負。但這些差異性，無關緊要，因為這些差異性看來似乎絲毫也不會影響分析結果，所以邊際

效用遞減與「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」是無意義的。

這也難怪有些經濟學家主張邊際效用遞減法則與「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」等類似概念，其實是多餘的、膚淺的、無意義的、且不科學的概念。拋棄這些概念不只毫不足惜，這種割捨掉不可觀察的主觀心理法則的做法，可被正面地標舉為一種讓經濟學邁向真正科學的進步徽章。

也因此，隨著總效用的交叉微分項或「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」沒有出現在個體選擇理論的舞台上。這就像邊際效用遞減與「ALEP 互補性定義」等概念，也因為跟序數效用的核心概念不能並存一樣，也只好被現代序數效用主義者將它供奉在經濟學的歷史博物館中一樣，只供經濟史學家與學生偶爾憑弔與懷舊之用。

4. 尋找新的劣等品定義

正如邊際效用遞減與互補與替代性的觀念是一種合宜的消費者選擇理論是不可或缺的概念，在序數效用理論的框框中不能被採用，就必須尋找新的定義來加以取代。同樣地，劣等品、中立品與正常品等概念也是一種合宜的消費者選擇理論是不能缺少的概念，但在序數效用理論的框框中不能被採用，因此必須尋找新的劣等品、中立品與正常品等概念，來填補「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」沒有現身在個體選擇理論的序數效用舞台所留下的空缺。自然厭惡真空，序數效用主義不得不排斥「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」，那用什麼概念來替代呢？

在討論互補性問題的時候，因為「ALEP 互補性定義」與無異曲線特性的序數效用概念無法相容，所以要尋找新的互補性概念。事實上，序數總效用主義者現在的替代品的定義是採取一種市場行為的定義。也就是，若一個商品的價格提高增加另一商品的需求量，價格提高商品就稱為所關注商品的替代品。同理，一項商品的價格提高降低所關注商品的需求量，則價格提高商品可稱為所關注商品的互補品。類似地，一項商品的價格提高不會影響所關注商品的需求量，則價格提高商品可稱為所關注商品的獨立品。

同理，「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」沒有出現在個體選擇理論的序數效用舞台所留下的空缺，序數總效用主義者很自然地採取同一種類似的選擇，還是採取一種市場行為的定義方式來填補。也就是，若所得提高需求量增加的商品為正常品，若所得提高需求量下降的商品為劣等品，若所得提高需求量維持不變的商品為中立品。

5. 序數效用理論當道的個體選擇理論

正向線性轉換就是效用具有長度概念的基本性質，隱含個人有能力分辨任何兩個效用差異(類似長度)的比例，效用此時是一種相當強烈地可衡量的概念，這是一種不切實際的落伍標籤。我們也說過，Samuelson (1938) 以「無限地不可能的」(infinitely improbable)的極端負面字眼來傳達他對基數效用理論的論斷，因為在真實人生中構成基數效用所需添加的假設或公設出現的機率幾乎為零。基數效用理論因此是一種非常不切實際的理論。我們也因此可以理解為何 Samuelson 會變成一位相當強硬的序數效用主義者。

由這歷史的發展，我們很難理解如果有人了解了基數效用這種幾乎不可能成立的特性之後，怎麼還會繼續採用基數效用理論來進行各式各樣的應用分析的心態。因此，現在經濟文獻中不斷出現的極大化基數總效用的應用理論的現象，或許我們應該詮釋為現代的應用經濟學家並不瞭解這段序數與基數效用理論的發展史與相關概念。或許是因為一些學者無法接受序數效用理論無法容許邊際效用變化方向的基本特性。

並且，也是因為基數效用理論的重大缺失，使得一些序數效用主義者相當有信心地主張，序數是比基數更好的效用理論，因為在獲得相同論述與分析結果的情況下，只需要用到較少或較寬鬆的假設。因此，在個體經濟理論中序數效用主義一直是唯一主流的排他性理論。

但是，事實上，真的如此嗎？序數效用理論真的可以完全做到基數效用理論能做到的事嗎？

其實，事實不是如此，而且是出乎意料之外地糟糕。

6. 林忠正的批評：魔鬼藏在細節裡，序數效用理論會曲解事實

林忠正在一些文章中，呼籲在接受序數總效用主義者的論述之前，應該要多多深思；在繼續前進之時，先停下腳步來，再仔細想一想，序數效用理論所建構出的需求理論真的沒有缺點嗎？沒有邊際效用遞減和「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」等概念真的不會對需求理論造成嚴重傷害嗎？其實，魔鬼藏在細節裡！

藉由以上的分析，看來任何總效用函數經過任何單調正向轉換後所構成的消費者選擇模型的數學分析結果都是一樣的，序數效用理論因此是完美的理論，但在做下此結論

之前，要提防外表是會騙人的！要知道魔鬼藏在細節裡！再多想想你可能會發現雖然單調正向轉換前後的任何兩個模型，所獲得的分析結果**(或更精準地說是總效果的分析結果)**是一樣的，但是若總效果可分成兩項，你會驚訝地發現這兩分項可能會是不一樣的。而且，這兩分項不只數值的大小可能不一樣，連數值正負方向可能都會不一樣。

在 Slutsky-Hicks 的個人選擇理論中只能以所得變化的總效果來定義劣等品，也就是所得提高需求數量下降的物品($x_M<0$)會被解釋為劣等品；而不能以所得提高使消費者對此商品的邊際效用下降(如$U_{xm}<0$)的角度來定義劣等品。但以所得提高需求數量下降($x_M<0$)的角度來定義劣等品是會出問題的。因為，

(58) $$sign(x_M)=sign(qU_{xm}-pU_{mm})\neq sign(U_{xm})$$

例如在貨幣邊際效用遞增$U_{mm}>0$的情況下，即使所得提高會使商品的邊際效用增加(如$U_{xm}>0$)，還是可能推導出所得增加而消費數量下降($x_M<0$)的情況。以 Slutsky-Hicks 的眼光來看，所得提高需求數量下降的物品($x_M<0$)被稱為劣等品；但是，由另一角度來看，此時愈有錢時人們對此物品的邊際評價或效用是提高而不是下降的，這時候稱此物品為劣等品是可能會出現違反常識的現象的，這可能是很荒謬的解釋。為什麼呢？

例如，我愈有錢時，我對高級 CD、或高檔餐廳的餐點、或高級服飾等商品的邊際效用愈高。在一般的情況下，所得提高使我的貨幣邊際效用下降，並且我對這些商品的邊際效用增加(如$U_{xm}>0$)，我會消費更多的這些商品，這時候由$x_M>0$與$U_{xm}>0$來定義正常品都一樣好。但是，假設我突然中了統一發票 1000 萬元新台幣的首獎，我發現有機會買得起房子，突然找到更好的存錢理由，所得提高此時增加貨幣邊際效用，雖然愈富有還是增加我對這些商品邊際效用，但這些高級商品的消費卻較少，這時由$x_M<0$來看是劣等品，但是由$U_{xm}>0$來思考，這些商品還是高貴商品不是劣等品。此分析法因此有時候會讓經濟學家或經濟學生，把不是劣等品的高貴物品錯誤詮釋為劣等品，這會曲解事實。[3]

我們再舉出另一個反向的問題。假設$U_{xm}<0$或$U_{xm}=0$，但因$U_{mm}<0$，並且使得$sign(x_M)=sign(qU_{xm}-pU_{mm})>0$。這表示由心理層面來看此商品不是正常品，只是因為錢愈多時消費者對錢的邊際效用下降，而導致較多的購買數量。此時，由心理層面來看，

[3] 詳細的說明，請參考林忠正刊登於《民報》的文章〈什麼是真正的蘋果橘子經濟學？淺談新古典經濟學的消費者選擇理論〉。

此商品不是正常品，而是劣等品或中立品，但由市場的購買行為來判斷卻是不折不扣的正常品。因此，這例子再次顯示，此分析法有時候會讓經濟學家或經濟學生，把不是正常品的物品錯誤詮釋為正常品，這會曲解事實。

因此，必須放棄邊際效用遞減和「所得提高商品邊際效用降低為劣等品的定義」等概念的理論，不是如一般經濟學家所認為的是建構消費者理論的充分理論，事實上，是會在解釋比較靜態的分析結果上，出現很大的紕漏的理論。

7. 連劣等品都不能妥善解釋的現代理論不要也罷

現代兩種主要效用理論，序數理論與基數理論都存在嚴重的缺失的現狀，讓我們領悟到兩層明顯的意義。第一層是破壞性的意義：建立於序數與基數效用理論的「預算限制下極大化總效用」的分析典範，不是一個正確合宜的分析架構，不應該被使用或再被採用來分析各式各樣千奇百怪的議題，這是一位科學家應該具有的基本素養與基本作為。了解現今主流理論的缺失後，在沒有更好的理論之下，最應努力的研究志業應該是傾全力去發展與尋覓新理論，而不是繼續採用一個明顯錯誤的分析架構，而以東改一個假設西改一個假設的方式不斷進行塞框框的解謎活動，以錯誤的分析架構不斷地去製造或生產論文，在錯誤的架構下論文發表的再多再好是否表示正面的意義是值得商榷的。第二層是建設性的意義：我們需要一個新的個體選擇理論，這一個新的個體選擇理論必須至少能合理地解釋邊際效用遞減、替代品與互補品、劣等品與正常品等 A、B、C 等級的經濟現象，還應該能展示能合理地解決其他經濟現象的能力。這些其他經濟現象，是我們以後要繼續探索與評估的議題。

由於效用理論是個體選擇理論的根基，個體選擇理論是現代其他經濟理論的基礎，位於經濟學個體選擇理論最根基性的效用理論存在重大缺陷，這表示現代龐大的經濟理論體系是建構在不穩定的地基之上。因此我們致力於建構一套具有這兩種效用理論的優點而無其缺點的兩全其美的新效用理論。

其實，所有這些奇奇怪怪的怪異劣等品定義與論述的現象，都指向一件事實，現在的需求理論是一個具有嚴重根本性缺失的理論。而這缺失，可能就出在現代經濟理論的最出發點的地方，也就是經濟學個體選擇理論的第一個假設就出錯了。

錯誤或怪異的需求理論要被真正地棄置，必須等待一場反革命或嶄新革命的誕生。

Reference

林忠正，(2014)，〈什麼是真正的蘋果橘子經濟學？淺談新古典經濟學的消費者選擇理論〉，民報。

Hicks, J.R. and R.G.D. Allen (1934) “A Reconsideration of the Theory of Value,” *Economica*, NS, 1: 52–76, 196–219.

Samuelson, P.A. (1938) “The Numerical Representation of Ordered Classifications and the Concept of Utility,” *Review of Economic Studies*, 6, pp. 65–70.

Varian, H.R. (1996) *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*, W&W Norton.

邁向需求理論的再次重建之路的系列論文

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色：難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(I)：效用極大化的 Marshall 模型與無意義的邊際效用遞減法則〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(II)：Marshall 的「邊際需求價格」模型與古典效用可衡量概念的意義〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈為 Marshall 需求理論編寫一冊返回經濟學舞台的劇本： 比較商品效用與價格效用的邊際摸索決策方式的 Marshall 模型〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法：完成序數效用革命理論的誕生〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈經濟學新的跨界十字交叉(A New Cross-Cross)圖形：取代無異曲線圖示的跨界序數邊際效用分析法的新圖示〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數效用革命的頭號戰犯：序數主義者眼中邏輯謬誤的常識性邊際效

用互補性定義〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈為什麼我們需要一個純正的立基心理法則的序數互補性理論？：難覓古典的 ALEP 互補性定義的完美分身〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」：在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈錯把馮京當馬涼：當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形 I：等序數邊際效用曲線〉，台灣經濟學會研討論文。

林忠正，(2015)，〈尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形 II：序數邊際效用曲線〉，台灣經濟學會研討論文。