

# 尋覓神秘未曾現蹤的替代品與互補品圖形 II

## 序數邊際效用曲線

林忠正\*

中央研究院經濟所研究員  
國立政治大學財政系教授  
國立交通大學經營管理研究所教授  
台北市南港區(115-41)研究院路2段128號  
中央研究院經濟所  
電話: 886-2-2782-2791 轉 507  
電子信箱: [cclin@econ.sinica.edu.tw](mailto:cclin@econ.sinica.edu.tw)

開始撰稿-2015年12月15日

完稿時間-2015年12月31日

列印時間-2016年2月4日



---

\*謝謝林曉珮助理非常有效率的協助。

## 尋覓神秘未曾現蹤的替代品與互補品圖形 II

### 序數邊際效用曲線

**[摘要]** 在林忠正(2015)的〈錯把馮京當馬涼：當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解〉的文章中，已經明確地論述，無異曲線圖形的斜率，只是反映兩種商品之間是：邊際效用為正的「好東西」，邊際效用為負的「壞東西」，或邊際效用為零的「無所謂的東西」，三種案例的各種不同組合狀態罷了。由總效用出發的無異曲線圖形無能於反映商品之間在消費效用會彼此影響的替代與互補性。在林忠正(2015)的〈尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形 II：等序數邊際效用曲線〉的文章中，我們將親眼看到新的跨價值觀的得與失的序數邊際效用分析法下的等序數邊際效用曲線的圖形，可以呈現以商品的邊際效用交叉項正負定義替代與互補關係，我們終於找到一種在經濟史上神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形了。在這篇文章中，我們要畫出另外一種也能完整呈現替代互補關係的在經濟史上神秘的未曾洩漏蹤跡的圖形——序數邊際效用圖形。並且，在新理論的相關分析中扮演關鍵的角色，其實是序數邊際效用圖形而不是等序數邊際效用曲線圖形。

**JEL 分類:** B120, B130, B210, D010

**關鍵詞:** 跨界、得與失、序數、基數、邊際效用

## 1. 尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形

雖然一些在經濟學歷史上留下顯赫名望的偉大經濟學家，都思考過或努力過嘗試畫出應該屬於經濟學消費選擇理論基本 A、B、C 基礎等級的替代品與互補品概念，你可以在 Pareto (1909/1971) 的《政治經濟學手冊》(*Manual of Political Economy*)，以及古典數理經濟學家 Bowley (1924/1965) 《經濟學的數學基礎》(*The Mathematical Groundwork of Economics*)，這兩本非常重要的古典經濟學名著中發現他們很努力地嘗試由無異曲線畫出相關圖形，但卻無法畫出一套完整且合乎直覺的替代品與互補品的圖形。在 Allen (1934a, 1934b)、Hicks (1939)、以及兩人的合寫文章 Hicks and Allen (1934) 中，你也可以感受到他們花費很多時間思考替代與互補品的問題，Samuelson (1947, 1974) 也長期思考此問題但也得不到具有說服力的解決之道。

一套以研究人類消費選擇理論出發而建構的現代主流經濟理論大廈，卻連最基本的商品替代性與互補性問題，都無法提供合情合理的理論論述與基本對應的完整圖形。這種對基本問題的無能表現，不得不讓人很自然地懷疑這套經濟理論可以說是「從根爛起」的虛假的不科學的理論。平心而論，我們實在不適合去當這套理論的跟隨者(followers)，而是應該有信心地去發展一套從第一個假設開始就不一樣的理论來取代它。

我們撰寫這一系列論文所想達成的目標，就是要努力與挑戰的不可能的任務，就是要從第一個假設開始，即「從根開始」進行經濟學個體選擇理論的再次重建的不可能任務。

當然，新理論一定不能採取兩套標準，只央求與批評他人理論必須通過這項標準與那項標準的考驗，而自己的理論有特權不需通過同樣的考驗。換句話說，新理論一定得自我要求能通過消費選擇理論最基本的商品替代性與互補性問題，能建構出序數效用概念的理論，並且能畫出一整套的完整圖形。

在林忠正(2015)的文章〈回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」：在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索〉中，我們已經展示能通過序數效用單調轉換性質的新互補性理論，而在林忠正(2015)的文章〈尋覓神秘未曾現蹤的替代品與互補品圖形 I：等序數邊際效用曲線〉中，我們也畫出一套能完整呈現替代品與互補品的等序數邊際效用曲線。在這一篇文章中我們將畫出另一種也能呈現完整的替代品與互補品的圖形——序數邊際效用曲線。

## 2. 尋覓另一種神秘未曾現蹤的替代品與互補品圖形

我們推測過，一套正常的消費者選擇理論所對應的替代品與互補品的圖形，應該呈現一整套的完整面貌。例如，如果負斜率的線表示兩商品是替代品，那很正常地，我們應該可以主張，在相同的條件下，正斜率的線應表示兩商品是互補品；並且，垂直的與水平的線會牽涉到獨立性商品，垂直與水平線應各有其各自的對稱性的角色要扮演。並且，我們應該可以對一項合格理論提出進一步的要求。如果負斜率的曲線是替代品，那麼，兩條相對斜率不同的負斜率曲線，在其他條件一樣之下，應該能吐露兩條斜率不同的線所表示的相對替代性程度不同的意義；同樣地，如果正斜率的曲線是互補品，那麼，兩條相對斜率不同的正斜率曲線，在其他條件一樣之下，應該能顯示兩條斜率不同的線所表示的相對互補性程度不同的意義。

在林忠正(2015)的〈錯把馮京當馬涼：當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解〉的文章中，已經明確地論述，無異曲線圖形無法通過這一套正常的消費者選擇理論所應該通過的替代品與互補品的基本關卡。而在林忠正(2015)的〈尋覓神秘未曾現蹤的替代品與互補品圖形 I：等序數邊際效用曲線〉的文章中，我們了解等序數邊際效用線的圖形，可以輕鬆順利地通過這基本關卡的考驗。

在這裡我想再提出，另外一種關於一套正常的消費者選擇理論，所對應的替代品與互補品的圖形，可能呈現一整套的完整面貌。

這套不同的樣貌是，如果商品之間的替代性與互補性不是反映在線(如等序數邊際效用線)的斜率之上，而是反映在線(如序數邊際效用線)的移動方向上，則新的替代品與互補品的圖形的基本關卡應該會變成：如果替代性商品數量增加使所關注商品的曲線往下移動，那很正常地，我們應該可以主張，在相同的條件下，互補性商品數量增加使所關注商品的曲線往上移動，並且獨立性商品數量增加應該不會對所關注商品的曲線的位置造成任何影響。並且，我們應該可以對一項合格理論提出進一步的要求：如果替代性商品數量增加使所關注商品的曲線往下移動，那麼，造成同一條曲線不同的向下移動幅度的商品，在其他條件一樣之下，應該能吐露相對不同的替代性程度的意義；同樣的，互補性商品數量增加使所關注商品的曲線往上移動，那麼，造成同一條曲線不同的向上移動幅度的商品，在其他條件一樣之下，應該能吐露相對不同的互補性程度的意義。

在這篇文章中，我們的目標就是要畫出這樣的另一種也能完整呈現替代互補關係，

並且在經濟史上也是神秘地未曾現蹤的圖形——序數邊際效用曲線。

### 3. 序數邊際效用曲線

在新的「跨界的得與失的序數邊際效用分析法」中，商品  $x$  的邊際效用函數的定義是：

$$(1) \quad \phi_x = \phi_x(x; y); \phi_{xx} \geq 0, \phi_{xy} \leq 0$$

首先，對  $x$  商品而言， $y$  商品是其互補品、替代品、獨立品的定義分別是：

$$(2a) \quad \phi_{xy} > 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的互補品}$$

$$(2b) \quad \phi_{xy} < 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的替代品}$$

$$(2c) \quad \phi_{xy} = 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的獨立品}$$

其次，我們所將集中焦點的曲線是  $x$  商品的邊際效用曲線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$ 。其經濟意義是在給定  $y$  商品的數量之下，不同的  $x$  商品所對應的邊際效用水準  $\phi_x$ ，在  $(x, \phi_x)$  平面上所構成的軌跡。

而  $x$  商品的邊際效用曲線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$  在  $(x, \phi_x)$  平面上的圖形的斜率，是取決於  $x$  商品的邊際效用的變化方向  $\phi_{xx} \geq 0$ ，即：

$$(3a) \quad \phi_{xx} < 0 \Leftrightarrow x \text{ 商品邊際效用遞減} \Leftrightarrow \text{邊際效用線斜率為負}$$

$$(3b) \quad \phi_{xx} > 0 \Leftrightarrow x \text{ 商品邊際效用遞增} \Leftrightarrow \text{邊際效用線斜率為正}$$

$$(3c) \quad \phi_{xx} = 0 \Leftrightarrow x \text{ 商品邊際效用不變} \Leftrightarrow \text{邊際效用曲線斜率為零(水平線)}$$

接下來，我們有兩種分類方式來進行後續的分析。第一種是先區分  $x$  商品是邊際效用遞減、遞增、不變三種不同的面向；再依序分別在這三種不同面向下，分析  $y$  商品是  $x$  商品的互補品、替代品、或是獨立品的情境。反過來，第二種是先區分  $y$  商品是  $x$  商品的互補品、替代品、或是獨立品三種不同的面向；再依序分別在這三種不同面向下，分析  $x$  商品是邊際效用遞減、遞增、不變的情境。

由於本文的主要目的是要展示在相同的情境或條件之下，互補品、替代品、以及獨立品三種不同的情況所將呈現的對稱性之美；而不是在相同的情境或條件之下，商品是邊際效用遞減、遞增、不變三種不同的面向所將呈現的對稱性。

因此，我們可以採取先區分  $x$  商品的邊際效用分別是遞減、遞增、或是不變三種情況，再分析與繪製  $y$  商品分別是  $x$  商品的互補品、獨立品、或是替代品的  $x$  商品的序數邊際效用線。我們也會進一步展示，商品的邊際效用先遞增再遞減的整合狀態下的互補性圖示。

#### 4. 商品邊際效用遞減的序數邊際效用線

在  $x$  商品的邊際效用遞減的情況下， $x$  商品的等序數邊際效用曲線的性質：

$$(4) \quad \phi_x = \phi_x(x; y); \phi_{xx} < 0, \phi_{xy} \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

此時，於  $(x, \phi_x)$  平面上， $x$  商品的序數邊際效用線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$  是負斜率  $\phi_{xx} < 0$  的線。

在  $x$  商品的邊際效用遞減的情況下，對  $x$  商品而言， $y$  商品分別是其互補品、替代品、獨立品時，對  $x$  商品的序數邊際效用線的不同的影響：

$$(5a) \quad \phi_{xy} > 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的互補品} \Leftrightarrow \text{負斜率邊際效用線往上移}$$

$$(5b) \quad \phi_{xy} < 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的替代品} \Leftrightarrow \text{負斜率邊際效用線往下移}$$

$$(5c) \quad \phi_{xy} = 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的獨立品} \Leftrightarrow \text{負斜率邊際效用線不動}$$

我們可以依據上述的數學推導結果，以單一的與群組的  $x$  商品的序數邊際效用線的圖形，來呈現神秘的未曾洩漏蹤跡的替代與互補圖形。

〔圖 1〕為，於  $(x, \phi_x)$  平面上，所繪製的負斜率序數邊際效用線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$ 。因為  $x$  商品邊際效用遞減  $\phi_{xx} < 0$ ， $x$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  減少，所以  $x$  商品序數邊際效用線的斜率為負。

〔圖 1a〕表示，因為  $y$  商品是  $x$  商品消費上的互補品  $\phi_{xy} > 0$ ， $y$  商品數量增加會使

$x$  商品邊際效用  $\phi_x$  增加，因此  $y$  商品數量增加會使  $x$  商品的序數邊際效用線往上移動。

〔圖 1b〕表示，因為  $y$  商品是  $x$  商品消費上的替代品  $\phi_{xy} < 0$ ， $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  減少，因此  $y$  商品數量增加會使  $x$  商品的序數邊際效用線往下移動。

〔圖 1c〕表示，因為  $y$  商品是  $x$  商品消費上的獨立品  $\phi_{xy} = 0$ ， $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  不變，因此  $y$  商品數量增加不會改變  $x$  商品的序數邊際效用線的位置。

接著，我們簡短討論在固定替代與固定互補兩種極端情況下， $x$  商品的序數邊際效用線的性質。

對  $x$  商品而言， $y$  商品是其固定互補品與固定替代品的定義分別是：

$$(6a) \quad \phi_{xy} = a > 0 \text{ 且 } a \text{ 是常數} \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的固定互補品}$$

$$(6b) \quad \phi_{xy} = a < 0 \text{ 且 } a \text{ 是常數} \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的固定替代品}$$

此時與非固定互補品與非固定替代品的唯一差異是，在固定互補品與固定替代品的特殊情況下，無論  $x$  商品與  $y$  商品的多寡，每增加一單位的  $y$  商品的數量對  $x$  商品的序數邊際效用線所造成的影響(移動幅度)都是一樣的。

## 5. 商品邊際效用遞增的序數邊際效用線

若商品的邊際效用遞增會出現如何的狀態？

在  $x$  商品的邊際效用遞增的情況下， $x$  商品的序數邊際效用線的性質：

$$(7) \quad \phi_x = \phi_x(x; y); \phi_{xx} > 0, \phi_{xy} \geq 0$$

此時，於  $(x, \phi_x)$  平面上， $x$  商品的序數邊際效用線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$  是正斜率  $\phi_{xx} > 0$  的線。

在  $x$  商品的邊際效用遞增的情況下，對  $x$  商品而言， $y$  商品分別是其互補品、替代品、獨立品時，對  $x$  商品的序數邊際效用線的不同的影響：

$$(8a) \quad \phi_{xy} > 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的互補品} \Leftrightarrow \text{正斜率邊際效用線往上移}$$

(8b)  $\phi_{xy} < 0 \Leftrightarrow y$  商品是  $x$  商品的替代品  $\Leftrightarrow$  正斜率邊際效用線往下移

(8c)  $\phi_{xy} = 0 \Leftrightarrow y$  商品是  $x$  商品的獨立品  $\Leftrightarrow$  正斜率邊際效用線不動

我們可以依據上述的數學推導結果，以單一的與群組的  $x$  商品的序數邊際效用線的圖形，來呈現神秘的未曾洩漏蹤跡的替代與互補圖形。

在〔圖 2〕中，於  $(x, \phi_x)$  平面上，所繪製的正斜率序數邊際效用線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$ ，因為  $x$  商品邊際效用遞增  $\phi_{xx} > 0$ ， $x$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  增加，所以  $x$  商品序數邊際效用線的斜率為正。

〔圖 2a〕表示，因為  $y$  商品是  $x$  商品消費上的互補品  $\phi_{xy} > 0$ ， $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  增加，因此  $y$  商品數量增加會使  $x$  商品的序數邊際效用線往上移動。

〔圖 2b〕表示，因為  $y$  商品是  $x$  商品消費上的替代品  $\phi_{xy} < 0$ ， $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  減少，因此  $y$  商品數量增加會使  $x$  商品的序數邊際效用線往下移動。

〔圖 2c〕表示，因為  $y$  商品是  $x$  商品消費上的獨立品  $\phi_{xy} = 0$ ， $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  不變，因此  $y$  商品數量增加不會改變  $x$  商品的序數邊際效用線的位置。

在固定替代與固定互補兩種極端情況下，與非固定互補品與非固定替代品的唯一差異是，在固定互補品與固定替代品的特殊情況下，無論  $x$  商品與  $y$  商品的多寡，每增加一單位的  $y$  商品的數量對  $x$  商品的序數邊際效用線所造成的影響(移動幅度)都維持相同。

## 6. 商品的邊際效用不變的序數邊際效用線

若商品的邊際效用不變會出現如何的狀態？

在  $x$  商品的邊際效用維持不變的情況下， $x$  商品的等序數邊際效用曲線的性質：

$$(9) \quad \phi_x = \phi_x(x; y); \phi_{xx} = 0, \phi_{xy} \underset{<}{\geq} 0$$

此時，於  $(x, \phi_x)$  平面上， $x$  商品的序數邊際效用線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$  是斜率為零的  $\phi_{xx} = 0$  的水



平線。

在  $x$  商品的邊際效用維持不變的情況下，對  $x$  商品而言， $y$  商品分別是其互補品、替代品、獨立品時，對  $x$  商品的序數邊際效用線的不同的影響：

(10a)  $\phi_{xy} > 0 \Leftrightarrow y$  商品是  $x$  商品的互補品  $\Leftrightarrow$  水平的邊際效用線往上移

(10b)  $\phi_{xy} < 0 \Leftrightarrow y$  商品是  $x$  商品的替代品  $\Leftrightarrow$  水平的邊際效用線往下移

(10c)  $\phi_{xy} = 0 \Leftrightarrow y$  商品是  $x$  商品的獨立品  $\Leftrightarrow$  水平的邊際效用線不動

我們可以依據上述的數學推導結果，以單一的與群組的  $x$  商品的序數邊際效用線的圖形，來呈現神秘的未曾洩漏蹤跡的替代與互補圖形了。

在〔圖 3〕中，於  $(x, \phi_x)$  平面上，所繪製的水平序數邊際效用線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$ 。因為  $x$  商品邊際效用維持不變  $\phi_{xx} = 0$ ， $x$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  維持不動，所以  $x$  商品序數邊際效用線是斜率為零的水平線。

〔圖 3a〕表示，因為  $y$  商品是  $x$  商品消費上的互補品  $\phi_{xy} > 0$ ， $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  增加，因此  $y$  商品數量增加會使水平的  $x$  商品的序數邊際效用線往上移動。

〔圖 3b〕表示，因為  $y$  商品是  $x$  商品消費上的替代品  $\phi_{xy} < 0$ ， $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  減少，因此  $y$  商品數量增加會使水平的  $x$  商品的序數邊際效用線往下移動。

〔圖 3c〕表示，因為  $y$  商品是  $x$  商品消費上的獨立品  $\phi_{xy} = 0$ ， $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  不變，因此  $y$  商品數量增加不會改變水平的  $x$  商品的序數邊際效用線的位置。

在固定替代與固定互補兩種極端情況下，與非固定互補品與非固定替代品的唯一差異是，在固定互補品與固定替代品的特殊情況下，無論  $x$  商品與  $y$  商品的多寡，每增加一單位的  $y$  商品的數量對  $x$  商品的序數邊際效用線所造成的影響(移動幅度)都維持相同。

## 7. 商品的邊際效用先遞增再遞減的序數邊際效用線

整合上述的分析結果，我們現在來分析一種商品的序數邊際效用先遞增再遞減的情況。

在  $x$  商品的邊際效用先遞增再遞減的情況下， $x$  商品的等序數邊際效用曲線的性質：

$$(11) \quad \phi_x = \phi_x(x; y); \phi_{xx} \text{ 先遞增 } \phi_{xx} > 0 \text{ 再遞減 } \phi_{xx} < 0, \phi_{xy} \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

此時，於  $(x, \phi_x)$  平面上， $x$  商品的序數邊際效用線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$  的斜率也會呈現先為正  $\phi_{xx} > 0$  再為負  $\phi_{xx} < 0$  的倒 U 型曲線。

在  $x$  商品的邊際效用先遞增再遞減的情況下，對  $x$  商品而言， $y$  商品分別是其互補品、替代品、獨立品時，對  $x$  商品的序數邊際效用線的不同的影響：

$$(12a) \quad \phi_{xy} > 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的互補品} \Leftrightarrow \text{先遞增再遞減的倒 U 型邊際效用線往上移}$$

$$(12b) \quad \phi_{xy} < 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的替代品} \Leftrightarrow \text{先遞增再遞減的倒 U 型邊際效用線往下移}$$

$$(12c) \quad \phi_{xy} = 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的獨立品} \Leftrightarrow \text{先遞增再遞減的倒 U 型邊際效用線不動}$$

商品的邊際效用先遞增後遞減，序數邊際效用線的群組圖形，由上述的分析可以統合成如下的圖形。

在〔圖 4〕中，於  $(x, \phi_x)$  平面上，所繪製的斜率先為正再為負的倒 U 型的序數邊際效用線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$ 。因為  $x$  商品邊際效用先遞增  $\phi_{xx} > 0$  再遞減  $\phi_{xx} < 0$ ，所以  $x$  商品序數邊際效用線呈現是斜率先為正再為負的倒 U 型。

〔圖 4a〕表示，因為  $y$  商品是  $x$  商品消費上的互補品  $\phi_{xy} > 0$ ， $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  增加，因此  $y$  商品數量增加會使倒 U 型的  $x$  商品的序數邊際效用線往上移動。

〔圖 4b〕表示，因為  $y$  商品是  $x$  商品消費上的替代品  $\phi_{xy} < 0$ ， $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  減少，因此  $y$  商品數量增加會使倒 U 型的  $x$  商品的序數邊際效用線往

下移動。

〔圖 4c〕表示，因為  $y$  商品是  $x$  商品消費上的獨立品  $\phi_{xy} = 0$ ， $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  不變，因此  $y$  商品數量增加不會改變倒 U 型的  $x$  商品的序數邊際效用線的位置。

## 8. 序數邊際效用線相對移動幅度大小的意義

在  $x$  商品邊際效用遞減  $\phi_{xx} < 0$  且  $y$  商品是  $x$  商品消費上的互補品  $\phi_{xy} > 0$  的情境下。首先， $x$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  減少， $x$  商品的序數邊際效用線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$  於  $(x, \phi_x)$  平面上的圖形為負斜率的線。其次， $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用  $\phi_x$  增加，因此  $x$  商品的序數邊際效用線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$  於  $(x, \phi_x)$  平面上的負斜率曲線會往上移動。這就是〔圖 1a〕中所繪製的往上移動的負斜率序數邊際效用線所呈現的情境。

我們現在想分析與表現的問題是：如果  $y$  商品數量增加會使  $x$  商品邊際效用曲線往上移動時， $y$  商品是  $x$  商品的互補品。那麼，在其他情況不變下，不同商品( $y$  商品與  $z$  商品)的同數量(都是增加一單位)的變化造成相對不同的上移幅度，是不是能合情合理地表示兩種商品與所關注的  $x$  商品的相對互補性程度不同。一項合格的理論，應該要通過這種基本門檻的考驗，否則就不宜宣稱是一套有能力取代舊理論的合格理論。

舉例而論，消費者對商品  $x$ ，在其互補品商品  $y$  的數量為  $y = y_0$  與其互補品  $z$  商品的數量為  $z = z_0$  時，所構成的序數邊際效用曲線  $\phi_x = \phi_x(x; y, z)$  為：

$$(13) \quad \phi_x = \phi_x(x; y_0, z_0)$$

接著，在商品  $y$  的數量增加一單位為  $y = y_1 = y_0 + 1$  而  $z$  商品的數量仍為  $z = z_0$  時，消費者商品  $x$  的序數邊際效用曲線變為：

$$(14) \quad \phi_x = \phi_x(x; y_1 = y_0 + 1, z_0) \quad \text{並且} \quad \phi_x(x; y_1 = y_0 + 1, z_0) > \phi_x(x; y_0, z_0)$$

接著，在商品  $y$  的數量維持不變仍為  $y = y_0$  而  $z$  商品的數量增加一單位為  $z = z_1 = z_0 + 1$  時，消費者商品  $x$  的序數邊際效用曲線變為：

$$(15) \quad \phi_x = \phi_x(x; y_0, z_1 = z_0 + 1) \quad \text{並且} \quad \phi_x(x; y_0, z_1 = z_0 + 1) > \phi_x(x; y_0, z_0)$$

我們進一步假設， $z$  商品對商品  $x$  的互補性效果比  $y$  商品對商品  $x$  的互補性效果強，

即兩條線的上移幅度相對大小為：

$$(16) \quad \phi_x(x; y_0, z_1 = z_0 + 1) - \phi_x(x; y_0, z_0) > \phi_x(x; y_1 = y_0 + 1, z_0) - \phi_x(x; y_0, z_0)$$

所以，兩條線的相對位置高低為：

$$(17) \quad \phi_x(x; y_0, z_1 = z_0 + 1) > \phi_x(x; y_1 = y_0 + 1, z_0)$$

也就是， $\phi_x(x; y_0, z_1 = z_0 + 1)$  線的位置比  $\phi_x(x; y_1 = y_0 + 1, z_0)$  線的位置高，即上移的幅度比較大，因為互補性比較強。

接著，我們現在就可以看看，不同商品(y 商品與 z 商品)的同數量(都是增加一單位)的變化，會不會因為 z 商品對商品 x 的互補性效果比 y 商品對商品 x 的互補性效果強，而造成 z 商品變動使商品 x 邊際效用曲線往上移動的幅度大於 y 商品相同單位變動使商品 x 邊際效用曲線往上移動的幅度。

事實上，我們已經證明的確如此，而且這圖形的繪製其實非常簡單而合乎直覺。

因為 z 商品和 y 商品都是商品 x 的互補品，因此 z 商品和 y 商品的數量增加都會使商品 x 邊際效用曲線往上移動。並且，因為 z 商品對商品 x 的互補性效果比 y 商品對商品 x 的互補性效果強，所以造成 z 商品變動使商品 x 邊際效用曲線往上移動的幅度大於 y 商品相同單位變動使商品 x 邊際效用曲線往上移動的幅度。這樣的圖形，就畫在〔圖 5〕中。

接著，我們討論 z 商品和 y 商品都是商品 x 的替代品，因此 z 商品和 y 商品的數量增加都會使商品 x 邊際效用曲線往下移動的狀況。

在 x 商品邊際效用遞減  $\phi_{xx} < 0$  且 y 商品是 x 商品消費上的替代品  $\phi_{xy} < 0$  的情境下。首先，x 商品數量增加會使 x 商品邊際效用  $\phi_x$  減少，x 商品的序數邊際效用線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$  於  $(x, \phi_x)$  平面上的圖形為負斜率的線。其次，y 商品數量增加會使 x 商品邊際效用  $\phi_x$  減少，因此 x 商品的序數邊際效用線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$  於  $(x, \phi_x)$  平面上的負斜率曲線會往下移動。這就是〔圖 1b〕中所繪製的往下移動的負斜率序數邊際效用線所呈現的情境。

我們現在想分析與表現的問題是：如果 y 商品數量增加會使 x 商品邊際效用曲線往下移動時，y 商品是 x 商品的替代品。那麼，在其他情況不變下，不同商品(y 商品與 z

商品)的同數量(都是增加一單位)的變化造成相對不同的下移幅度，是不是能合情合理地表示兩種商品與所關注的  $x$  商品的相對替代性程度不同。一項合格的理論，應該要通過這種基本門檻的考驗，否則就不宜宣稱是一套有能力取代舊理論的合格理論。

舉例而論，消費者對商品  $x$ ，在商品  $y$  的數量為  $y = y_0$  與  $z$  商品的數量為  $z = z_0$  時，所構成的序數邊際效用曲線  $\phi_x = \phi_x(x; y, z)$  為式(13)中的  $\phi_x = \phi_x(x; y_0, z_0)$ 。

接著，在商品  $y$  的數量增加一單位為  $y = y_1 = y_0 + 1$  而  $z$  商品的數量仍為  $z = z_0$  時，消費者商品  $x$  的序數邊際效用曲線變為：

$$(18) \quad \phi_x = \phi_x(x; y_1 = y_0 + 1, z_0) \quad \text{並且} \quad \phi_x(x; y_1 = y_0 + 1, z_0) < \phi_x(x; y_0, z_0)$$

接著，在商品  $y$  的數量維持不變仍為  $y = y_0$  而  $z$  商品的數量增加一單位為  $z = z_1 = z_0 + 1$  時，消費者商品  $x$  的序數邊際效用曲線變為：

$$(19) \quad \phi_x = \phi_x(x; y_0, z_1 = z_0 + 1) \quad \text{並且} \quad \phi_x(x; y_0, z_1 = z_0 + 1) < \phi_x(x; y_0, z_0)$$

我們進一步假設， $z$  商品對商品  $x$  的替代性效果比  $y$  商品對商品  $x$  的替代性效果強，即兩條線的下移幅度相對大小為：

$$(20) \quad \phi_x(x; y_0, z_0) - \phi_x(x; y_0, z_1 = z_0 + 1) > \phi_x(x; y_0, z_0) - \phi_x(x; y_1 = y_0 + 1, z_0)$$

所以，兩條線的相對位置高低為：

$$(21) \quad \phi_x(x; y_0, z_1 = z_0 + 1) < \phi_x(x; y_1 = y_0 + 1, z_0)$$

也就是， $\phi_x(x; y_0, z_1 = z_0 + 1)$  線的位置比  $\phi_x(x; y_1 = y_0 + 1, z_0)$  線的位置低，即下移的幅度比較大，因為替代性比較強。

接著，我們現在就可以看看，不同商品( $y$  商品與  $z$  商品)的同數量(都是增加一單位)的變化，會不會因為  $z$  商品對商品  $x$  的替代性效果比  $y$  商品對商品  $x$  的替代性效果強，而造成  $z$  商品變動使商品  $x$  邊際效用曲線往下移動的幅度大於  $y$  商品相同單位變動使商品  $x$  邊際效用曲線往下移動的幅度。

事實的確如此，而且這圖形的繪製其實非常簡單而合乎直覺。

因為  $z$  商品和  $y$  商品都是商品  $x$  的替代品，因此  $z$  商品和  $y$  商品的數量增加都會使商

品  $x$  邊際效用曲線往下移動。並且，因為  $z$  商品對商品  $x$  的替代性效果比  $y$  商品對商品  $x$  的替代性效果強，所以造成  $z$  商品變動使商品  $x$  邊際效用曲線往下移動的幅度大於  $y$  商品相同單位變動使商品  $x$  邊際效用曲線往下移動的幅度。這樣的圖形，就被畫在〔圖 6〕中。

## 9. 單調轉換

對  $x$  商品的序數邊際效用線進行正向單調轉換：

$$(22) \quad \Phi_x(x; y) = F(\phi_x(x; y)); \quad F' > 0, \quad F'' \geq 0$$

也就是，原先的邊際效用函數  $\phi_x(x; y)$ ，經過  $F(\phi_x(x; y))$  函數的轉換後，所獲得的新邊際效用函數  $\Phi_x(x; y)$ 。正向單調轉換的特性反映在  $F' > 0$  的特性上，也就是原來相對比較大的邊際效用數值經過轉換之後，相對的邊際效用數值還是比較大。除此之外，正向單調轉換並不要求轉換前後相對大小的差異必須維持固定，所以  $F'' \geq 0$  皆可。

$x$  商品的序數邊際效用線經過正向單調轉換之後，會直接衍生以下的性質：

$$(23) \quad \Phi_{xx}(x; y) = F'\phi_{xx}(x; y)$$

$$(24) \quad \Phi_{xy}(x; y) = F'\phi_{xy}(x; y)$$

因此，我們得到  $sign\Phi_{xx} = sign\phi_{xx}$  的結果，也就是，單調轉換不會改變邊際效用變化的正負方向，所以在林忠正的序數邊際效用分析法中，邊際效用遞減法則是一種序數效用而不是基數效用的定義。

在林忠正的序數邊際效用分析法中，單調轉換後不會改變序數邊際效用的正負方向，也就是：

$$(25a) \quad \phi_{xx} < 0 \Leftrightarrow \Phi_{xx} < 0 \Leftrightarrow x \text{ 商品邊際效用遞減} \Leftrightarrow \text{邊際效用線斜率為負}$$

$$(25b) \quad \phi_{xx} > 0 \Leftrightarrow \Phi_{xx} > 0 \Leftrightarrow x \text{ 商品邊際效用遞增} \Leftrightarrow \text{邊際效用線斜率為正}$$

$$(25c) \quad \phi_{xx} = 0 \Leftrightarrow \Phi_{xx} = 0 \Leftrightarrow x \text{ 商品邊際效用不變} \Leftrightarrow \text{邊際效用線斜率為零(水平線)}$$

並且，在這篇文章中更重要的結果是，我們也得到  $sign\Phi_{xy} = sign\phi_{xy}$  的結果，也就是，單調轉換不會改變替代互補的定義，所以在林忠正的序數邊際效用分析法中，所採取的

以邊際效用交叉項的正負為互補品與替代品的定義，是一種序數效用而不是基數效用的定義。

這與 Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto 以總效用的二次微分項正負為的互補品與替代品的定義，是一種基數效用而不是序數效用的定義，是非常不一樣的概念。換句話說，表面上看來，我所用的定義與 Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto 的定義一樣都是立基於邊際效用交叉項的正負，但事實上，兩者在思維方式上可能是非常不同的。林忠正是直接由邊際效用出發的理論，Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto 邊際效用交叉項的正負可能是一種直接由總效用出發的理論。在直接由總效用出發的理論中，就像 Hicks 和 Allen 以及其他學者所提出的批評，邊際效用交叉項的互補性定義在序數效用的概念之下，是必須被丟棄的無意義的定義。

換句話說，在林忠正的序數邊際效用分析法中，單調轉換後不會改變序數邊際效用交叉項的正負，也就是：

$$(26a) \quad \phi_{xy} > 0 \Leftrightarrow \Phi_{xy} > 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的互補品}$$

$$(26b) \quad \phi_{xy} < 0 \Leftrightarrow \Phi_{xy} < 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的替代品}$$

$$(26c) \quad \phi_{xy} = 0 \Leftrightarrow \Phi_{xy} = 0 \Leftrightarrow y \text{ 商品是 } x \text{ 商品的獨立品}$$

簡言之，新理論的常識性互補性定義，可以通過正向單調轉換關卡的考驗，林忠正的新理論所採取的互補性定義是一種序數的而不是基數的概念。

## 10. 另一種商品的替代互補圖示

商品  $y$  的邊際效用函數的定義是：

$$(27) \quad \varphi_y = \varphi_y(y; x); \quad \varphi_{yy} \leq 0, \quad \varphi_{yx} \leq 0$$

對  $y$  商品而言， $x$  商品是其互補品、替代品、獨立品的定義分別是：

$$(28a) \quad \varphi_{yx} > 0 \Leftrightarrow x \text{ 商品是 } y \text{ 商品的互補品}$$

(28b)  $\phi_{yx} < 0 \Leftrightarrow x$  商品是  $y$  商品的替代品

(28c)  $\phi_{yx} = 0 \Leftrightarrow x$  商品是  $y$  商品的獨立品

其次，我們所將集中焦點的曲線是  $y$  商品的邊際效用曲線  $\phi_y = \phi_y(y; x)$ 。其經濟意義是在給定  $x$  商品的數量之下，不同的  $y$  商品所對應的邊際效用水準  $\phi_y$ ，在  $(y, \phi_y)$  平面上所構成的軌跡。

但是，因為  $y$  商品的邊際效用曲線  $\phi_y = \phi_y(y; x)$  的分析與繪圖工作，純粹只是  $x$  商品的邊際效用曲線  $\phi_x = \phi_x(x; y)$  的分析與繪圖工作的重複，所以我們就不再重複分析，就此打住。

## 11. 互補品與替代品數量變動對消費者均衡與需求函數的圖解

事實上，商品的序數邊際效用曲線而不是商品的等序數邊際效用曲線，在新的理論中才是分析消費者均衡選擇的關鍵分析工具或圖形，在此我們重複在〈回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」：在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索〉中，所畫出的基本圖形，讓讀者更清楚地體會新理論的分析方式及思惟邏輯。

在【圖 7】的上圖中，因為價格上漲對  $\phi_x(x; y)$  沒有影響，這表示當價格由  $p$  上漲至  $\hat{p}$  時， $\phi_x(x; y)$  直線不動。另外，當價格由  $p$  上漲至  $\hat{p}$  時，圖中  $\psi^p(p; M - px)$  線往上移至  $\psi^{\hat{p}}(\hat{p}; M - \hat{p}x)$  線的位置。新均衡出現在上圖兩線的新交點  $\hat{e}^*$  上，此均衡點所對應的價格  $\hat{p}$  與數量  $\hat{x}^*$  是下圖中的均衡點  $\hat{E}^*$ ，連接  $E^*$  與  $\hat{E}^*$  可畫出負斜率的個人需求線  $x^d = x^d(p, M, y)$ 。

接著，我們就可以分析互補品、替代品與獨立品的數量變動，對商品  $x$  的購買數量的影響。

首先，在【圖 8】中，當商品  $y$  為商品  $x$  的互補品  $\phi_{xy} > 0$ ，商品  $y$  增加會使商品  $x$  的邊際效用  $\phi_x(x; y)$  線往右移動，這造成個人需求線  $x^d = x^d(p, M, y)$  也往右移動，在相同的價格下使消費者對商品  $x$  的需求量提高  $x_y > 0$ 。其次，在【圖 9】中，當商品  $y$  為商品  $x$  的替代品  $\phi_{xy} < 0$ ，商品  $y$  增加會使商品  $x$  的邊際效用  $\phi_x(x; y)$  線往左移動，這造成個人需求線  $x^d = x^d(p, M, y)$  也往左移動，在相同的價格下使消費者對商品  $x$  的需求量減少



$x_y < 0$ 。最後，在【圖 10】中，當商品  $y$  為商品  $x$  的獨立品  $\phi_{xy} = 0$ ，商品  $y$  增加時商品  $x$  的邊際效用  $\phi_x(x; y)$  線維持不動，個人需求線  $x^d = x^d(p, M, y)$  也維持不動，則商品  $y$  增加不會使消費者對商品  $x$  的需求量發生變化  $x_y = 0$ 。

## 12. 我們又猜對了嗎？

此文開始的時候，我們依據過去的經驗，對互補性圖形應該呈現一套的完整面貌或基本要求，提出以下的猜想：

如果替代性商品數量增加使所關注商品的曲線往下移動，那很正常地，我們應該可以主張，在相同的條件下，互補性商品數量增加使所關注商品的曲線往上移動，並且獨立性商品數量增加應該不會對所關注商品的曲線的位置造成任何影響。並且，我們應該可以對一項合格理論提出進一步的要求：

第一，替代性商品數量增加使所關注商品的曲線往下移動，那很正常地，我們應該可以主張，在相同的條件下，互補性商品數量增加使所關注商品的曲線往上移動，並且獨立性商品數量增加應該不會對所關注商品的曲線的位置造成任何影響。

第二，如果替代性商品數量增加使所關注商品的曲線往下移動，那麼，造成同一條曲線不同的向下移動幅度的商品，在其他條件一樣之下，應該能吐露相對不同替代性程度的意義；同樣地，互補性商品數量增加使所關注商品的曲線往上移動，那麼，造成同一條曲線不同的向上移動幅度的商品，在其他條件一樣之下，應該能吐露相對不同互補性程度的意義。

以上這些猜測，是一種先驗的或事先的理論猜測。我們分析的結果顯示，我們猜對了。我們的分析結果，完全符合我們事先的猜測，新理論再次通過一項基本但嚴格的考驗。

我們發現林忠正所率先提議發展的「跨界的得與失的序數邊際效用分析法」能展示「最簡單的東西應該是最容易去充分了解的」的正常直覺，以及如何平平順順地合情合理且心安理得地踏上返回自自然然的互補性的「應許之地」。

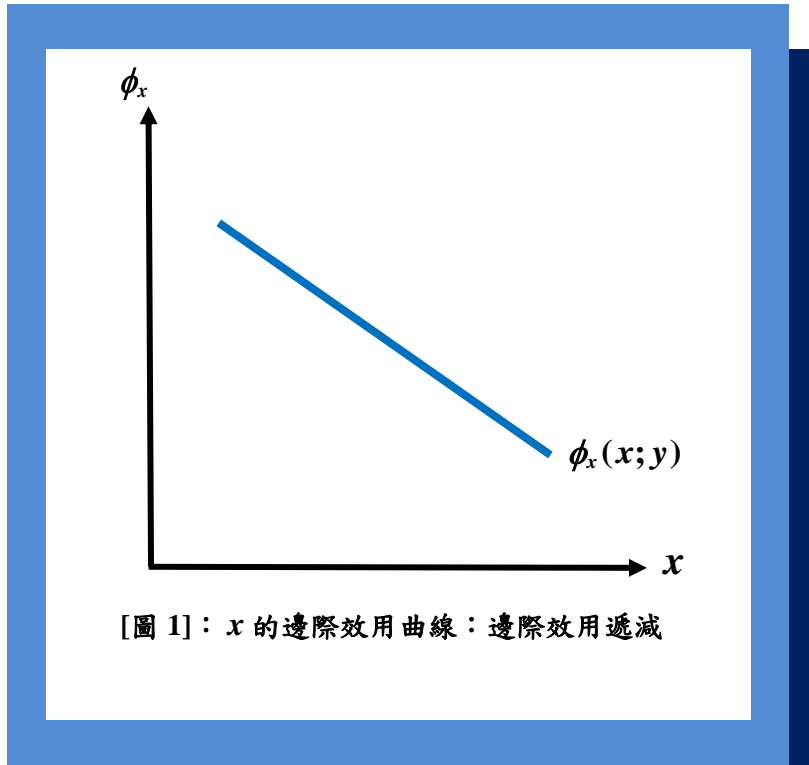
或許，我們真正可以回到應許之地。

現在，我們可以懷抱更強的信心與信念繼續往需求理論的再次重建之路邁進了。

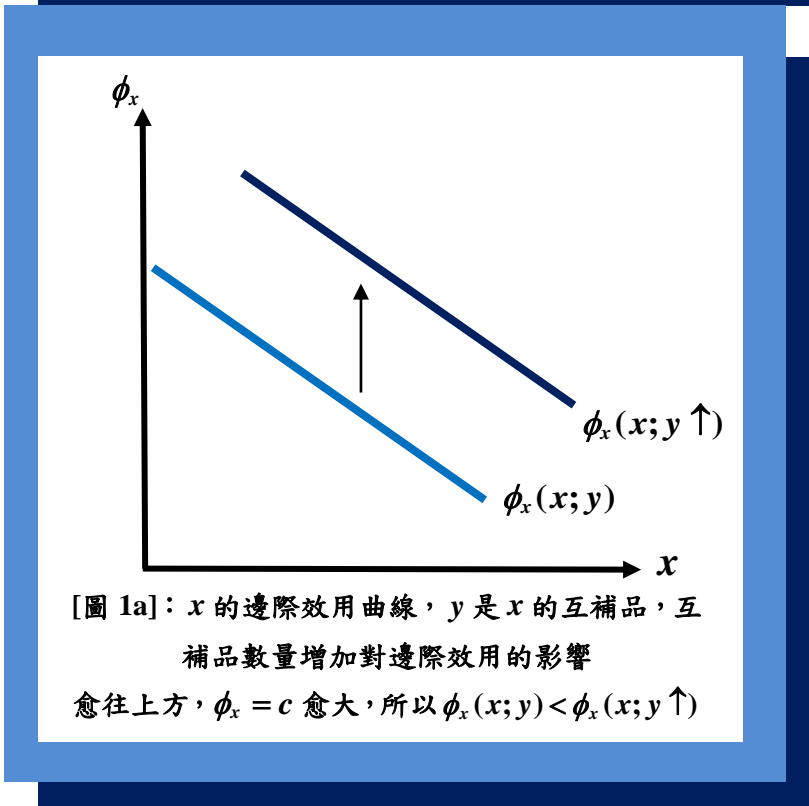
## Reference

- 林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(1)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(2)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色：難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(3)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(I)：效用極大化的 Marshall 模型與無意義的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(4)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(II)：Marshall 的「邊際需求價格」模型與古典效用可衡量概念的意義〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(5)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈為 Marshall 需求理論編寫一冊返回經濟學舞台的劇本：比較商品效用與價格效用的邊際摸索決策方式的 Marshall 模型〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(6)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法：完成序數效用革命理論的誕生〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(7)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈經濟學新的跨界十字交叉(A New Cross-Cross)圖形：取代無異曲線圖示的跨界序數邊際效用分析法的新圖示〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(8)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈序數效用革命的頭號戰犯：序數主義者眼中邏輯謬誤的常識性邊際效用互補性定義〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(9)，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈為什麼我們需要一個純正的立基心理法則的序數互補性理論？：難覓古典的 ALEP 互補性定義的完美分身〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(10)，研討論文。

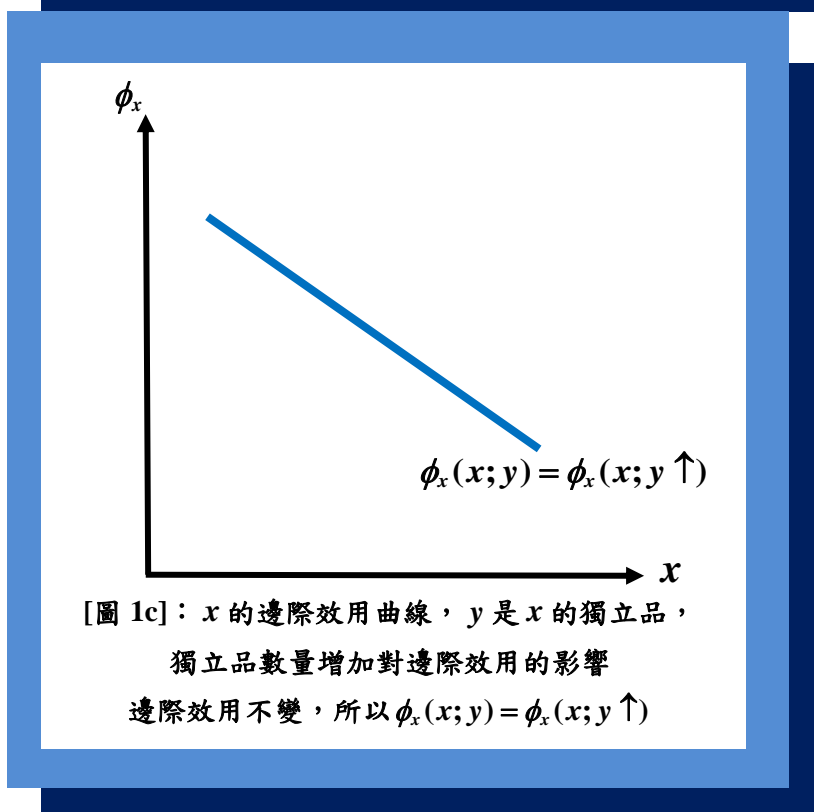
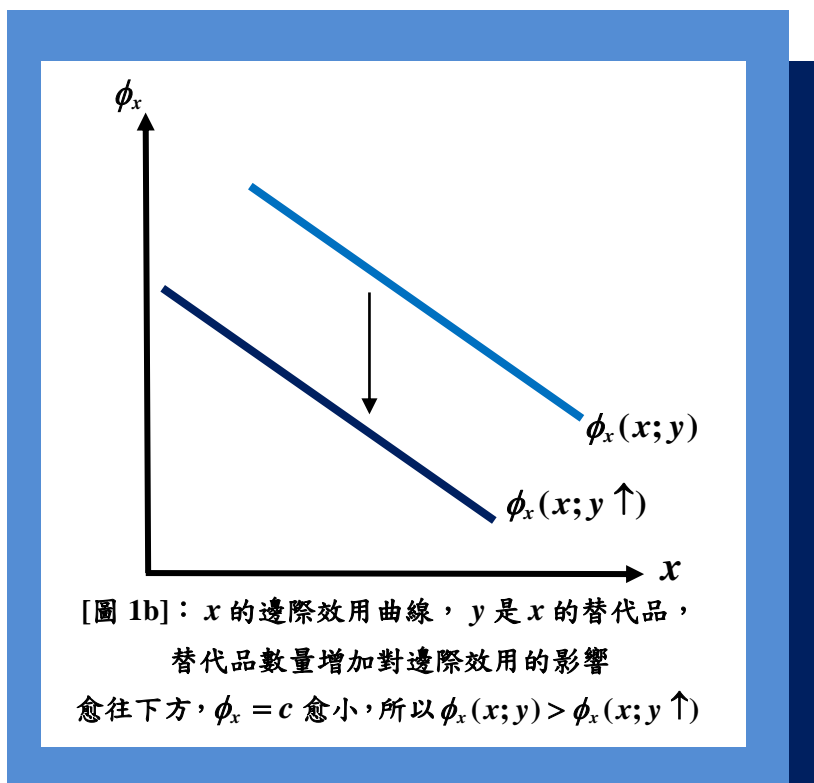
- 林忠正，(2015)，〈回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」：在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索〉，*跨界得與失的序數邊際效用分析法(11)*，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈錯把馮京當馬涼：當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解〉，*跨界得與失的序數邊際效用分析法(12)*，研討論文。
- 林忠正，(2015)，〈尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形 I：等序數邊際效用曲線〉，*跨界得與失的序數邊際效用分析法(13)*，研討論文。
- 邢慕寰譯，(1967)，《價值與資本》(*Value and Capital*)，台北市：台灣銀行經濟研究室。
- Allen, R.G.D. (1934a) "A Comparison between Different Definitions of Complementary and Competitive Goods," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 2:2, pp. 168-175.
- Allen, R.G.D. (1934b) "Nachfragefunktionen für Güter mit korreliertem Nutzen," *Zeitschrift für Nationalökonomie*. 5:4, pp. 486-506.
- Bowley, A.L. (1924/1965) *The Mathematical Groundwork of Economics: An Introductory Treatise*, Oxford.
- Hicks, J.R. (1939) *Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*, Oxford: Clarendon Press.
- Hicks, J.R. and R.G.D. Allen (1934) "A Reconsideration of the Theory of Value," *Economica*, NS, 1: 52-76, 196-219.
- Samuelson, P.A. (1947/1983) *Foundations of Economic Analysis*, Harvard Economic Studies, Vol. 80, Enlarged Edition.
- Samuelson, P.A. (1974) "Complementarity: An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory," *Journal of Economic Literature*, pp. 1255-1289.
- Pareto, V. ([1909] 1971) *Manual of Political Economy*, New York: Kelley.

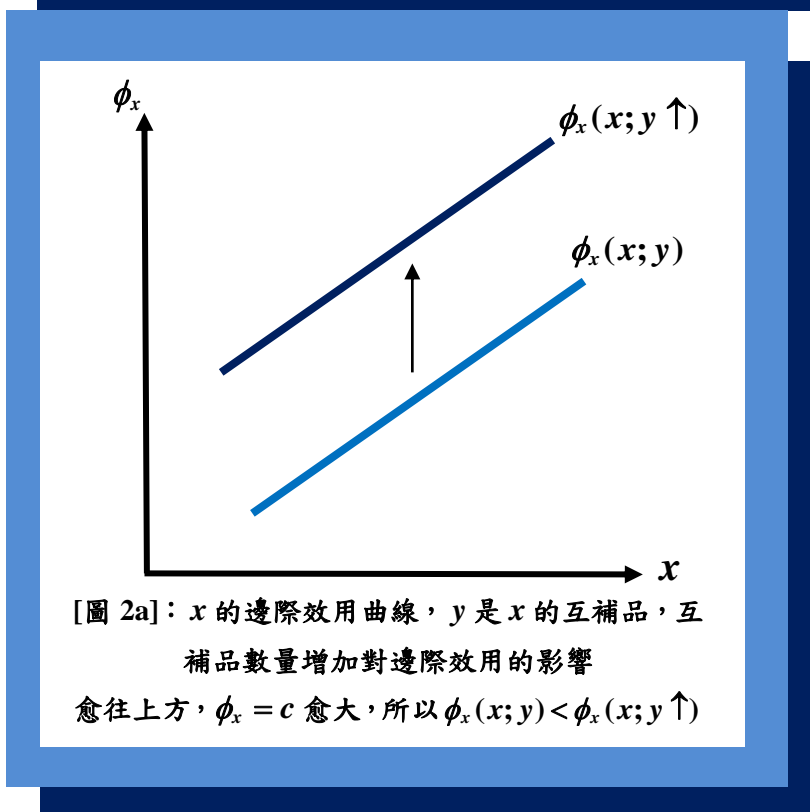
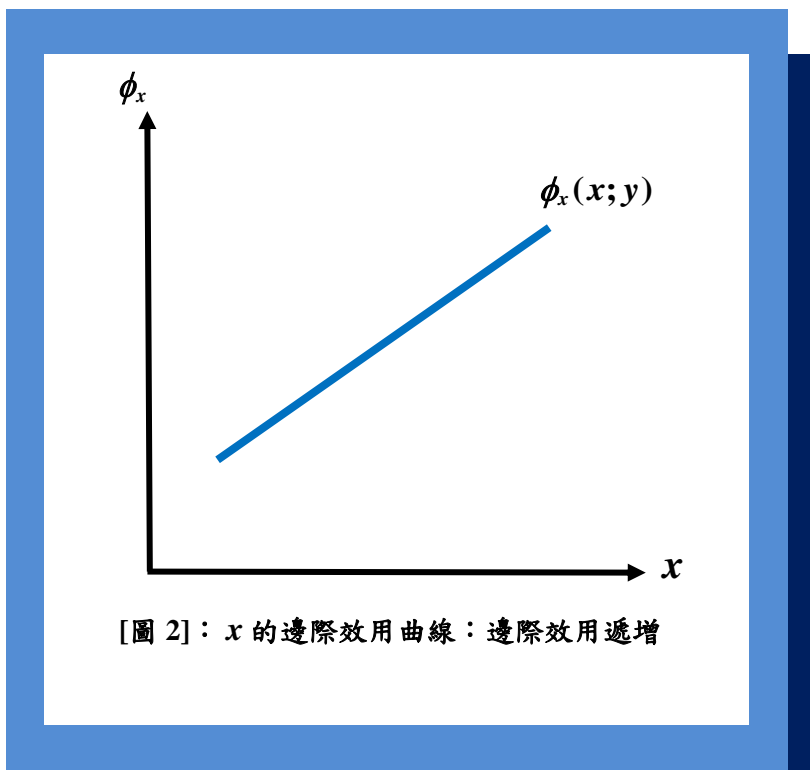


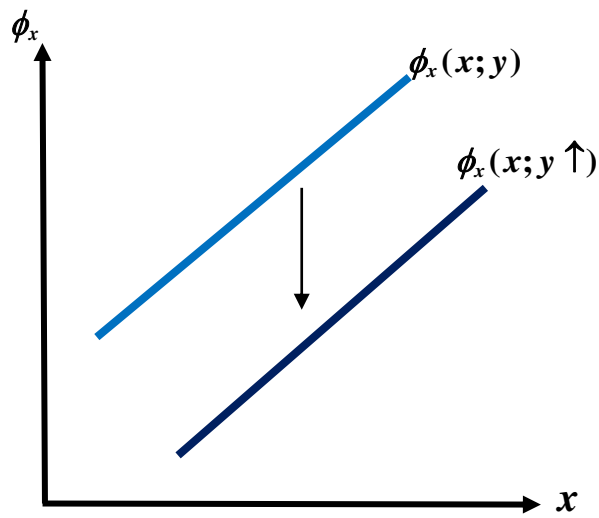
[圖 1]:  $x$  的邊際效用曲線: 邊際效用遞減



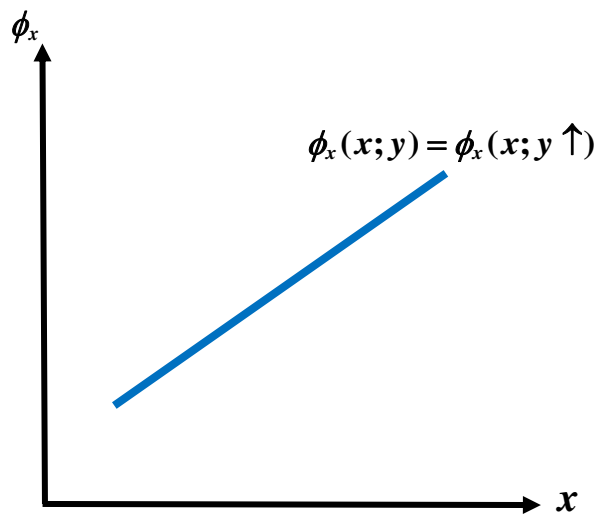
[圖 1a]:  $x$  的邊際效用曲線,  $y$  是  $x$  的互補品, 互補品數量增加對邊際效用的影響  
愈往上方,  $\phi_x = c$  愈大, 所以  $\phi_x(x; y) < \phi_x(x; y \uparrow)$



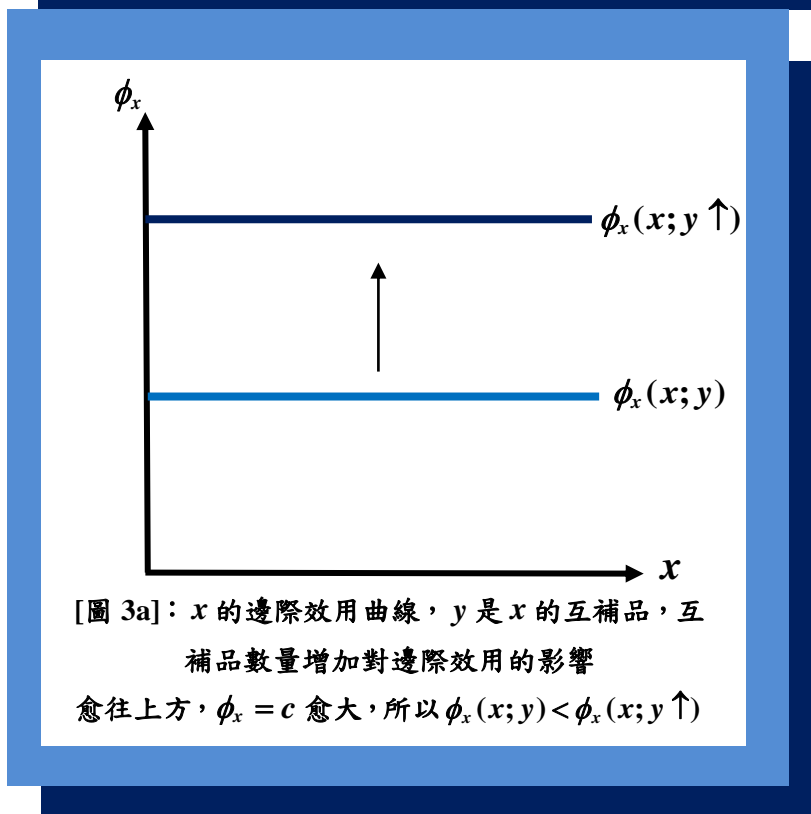
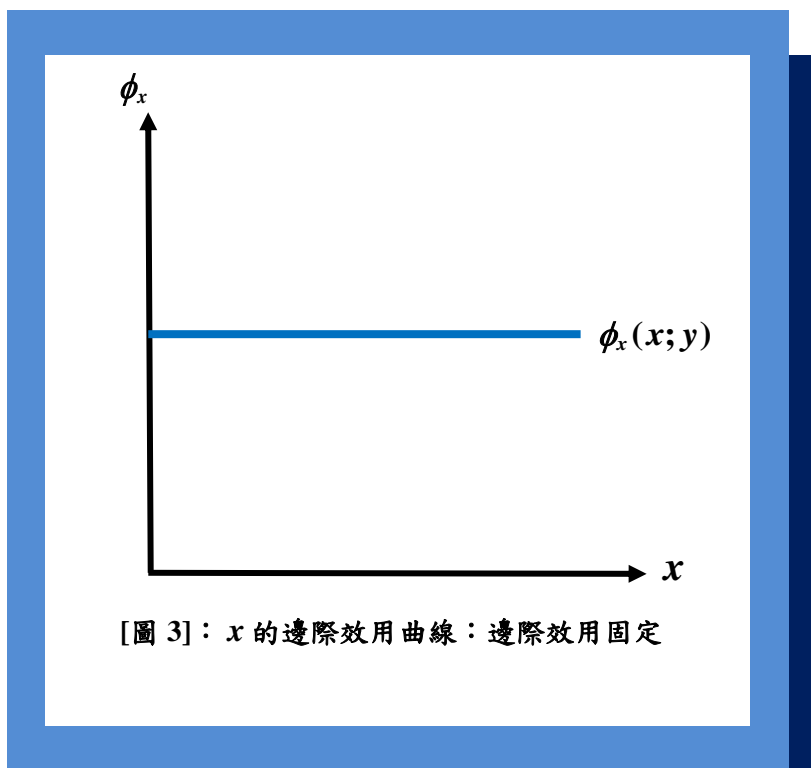




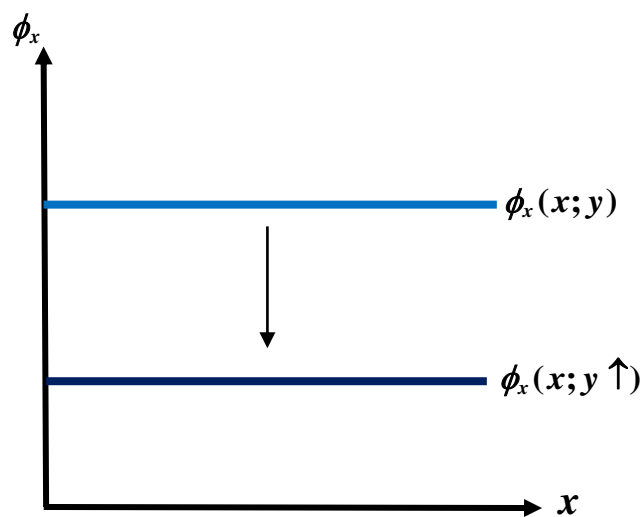
[圖 2b]:  $x$  的邊際效用曲線,  $y$  是  $x$  的替代品,  
 替代品數量增加對邊際效用的影響  
 愈往下方,  $\phi_x = c$  愈小, 所以  $\phi_x(x; y) > \phi_x(x; y \uparrow)$



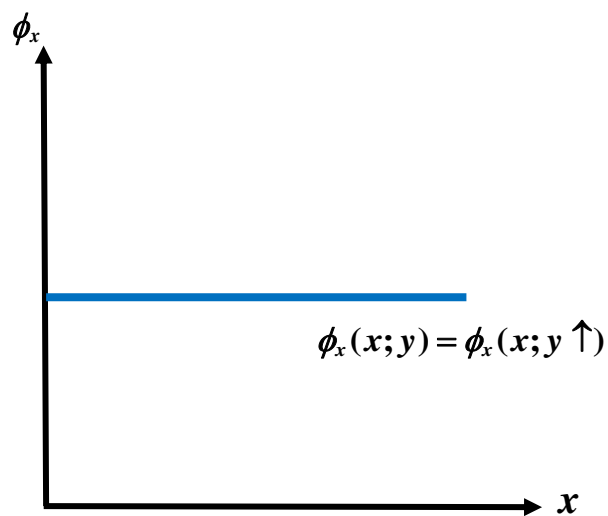
[圖 2c]:  $x$  的邊際效用曲線,  $y$  是  $x$  的獨立品,  
 獨立品數量增加對邊際效用的影響  
 邊際效用不變, 所以  $\phi_x(x; y) = \phi_x(x; y \uparrow)$



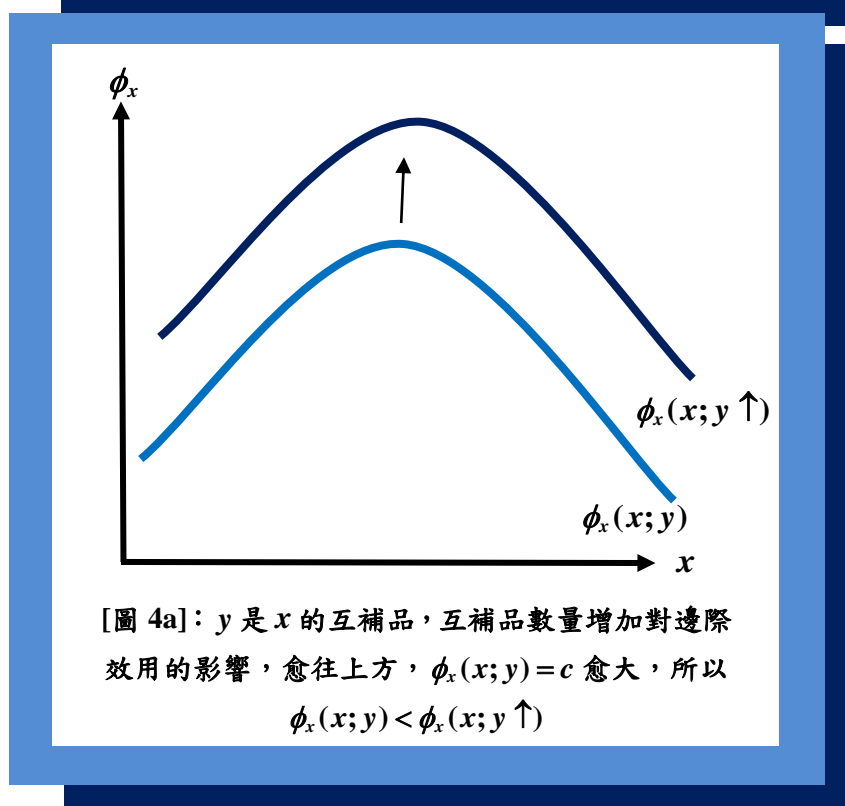
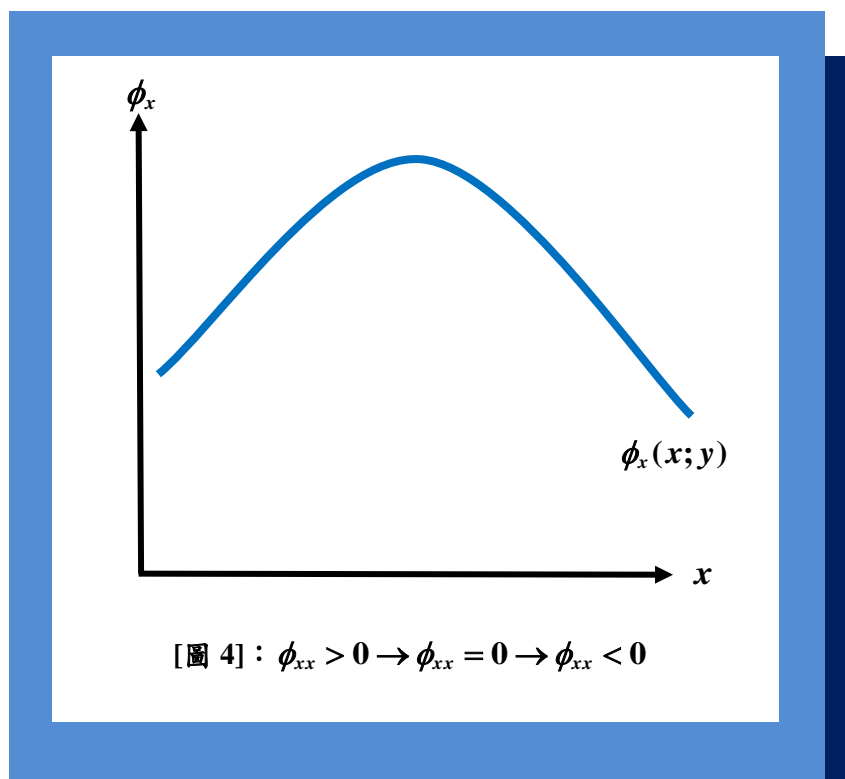


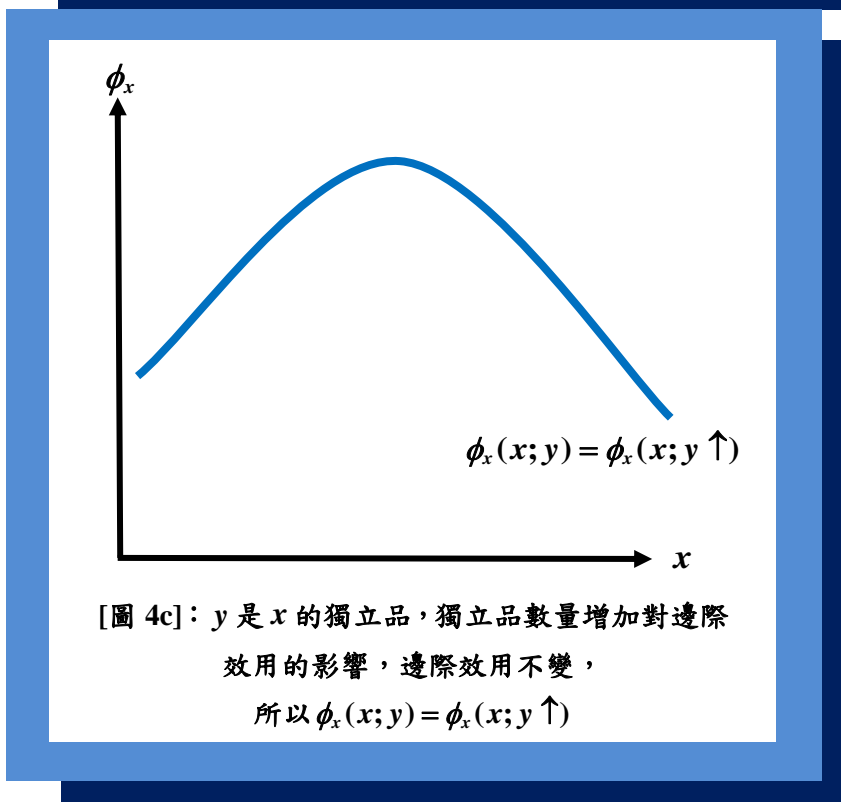
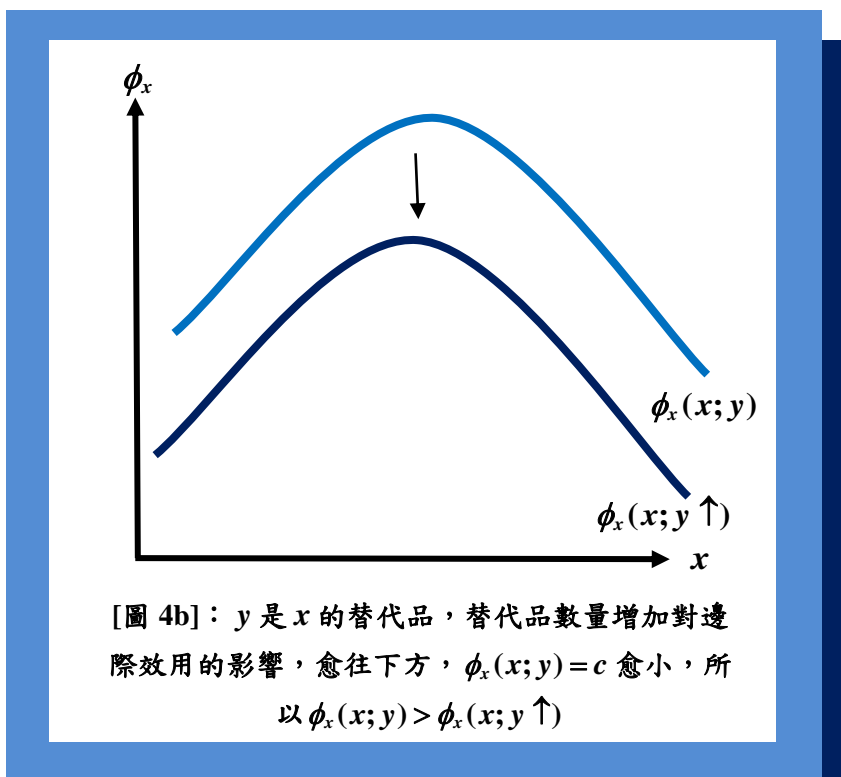


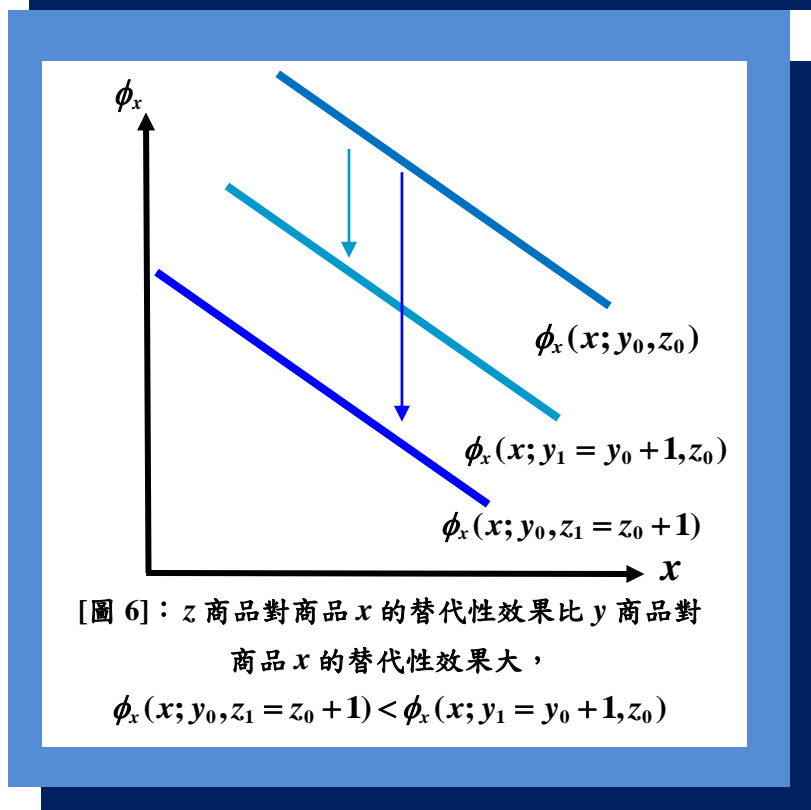
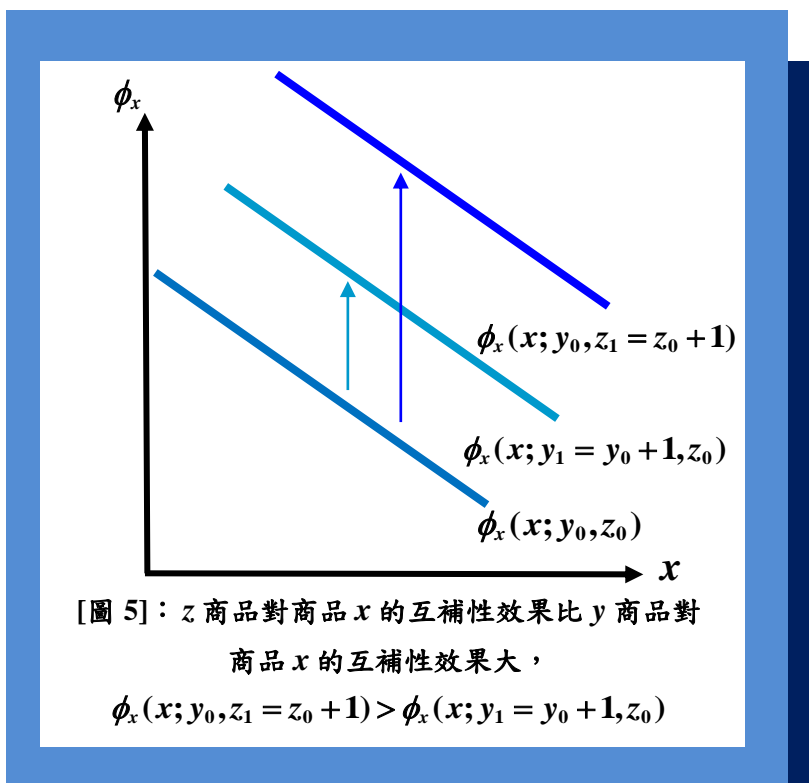
[圖 3b]:  $x$  的邊際效用曲線,  $y$  是  $x$  的替代品,  
 替代品數量增加對邊際效用的影響  
 愈往下方,  $\phi_x = c$  愈小, 所以  $\phi_x(x; y) > \phi_x(x; y \uparrow)$

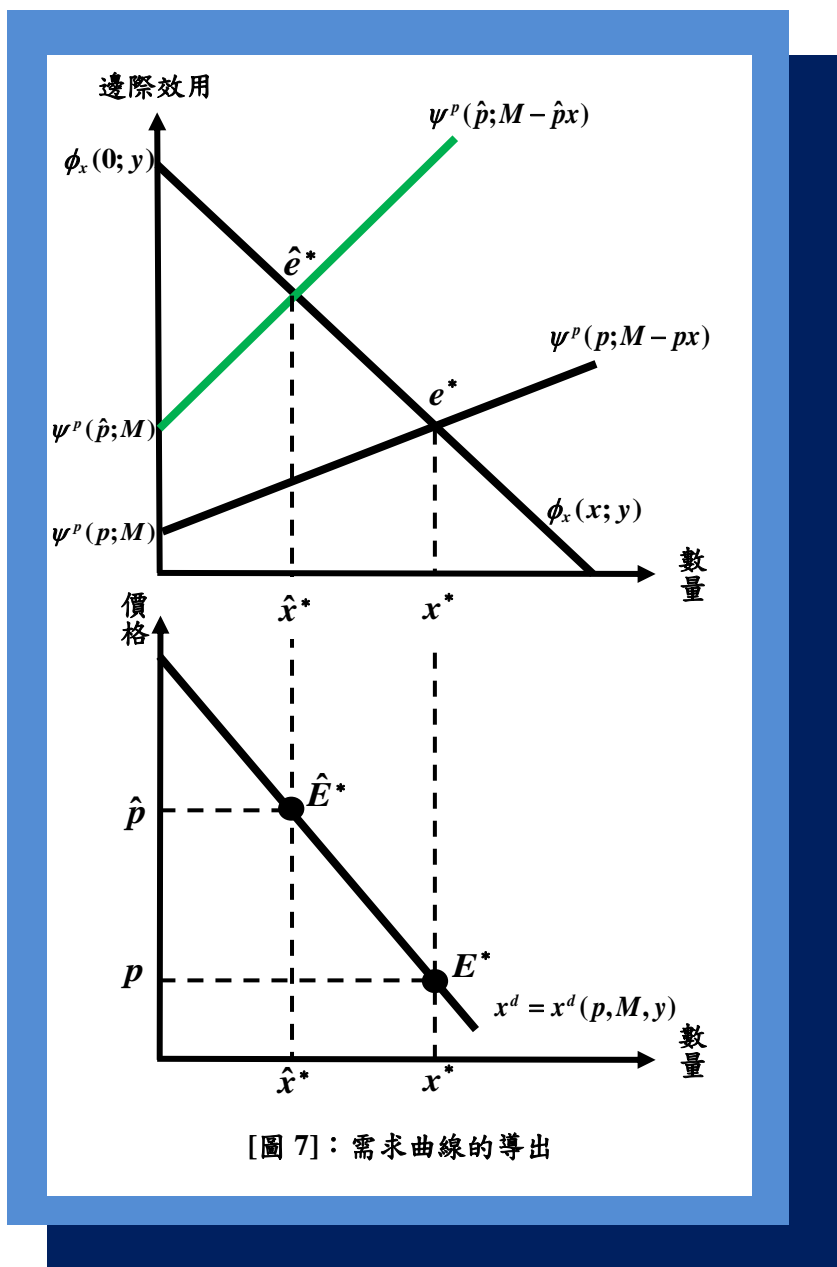


[圖 3c]:  $x$  的邊際效用曲線,  $y$  是  $x$  的獨立品,  
 獨立品數量增加對邊際效用的影響  
 邊際效用不變, 所以  $\phi_x(x; y) = \phi_x(x; y \uparrow)$

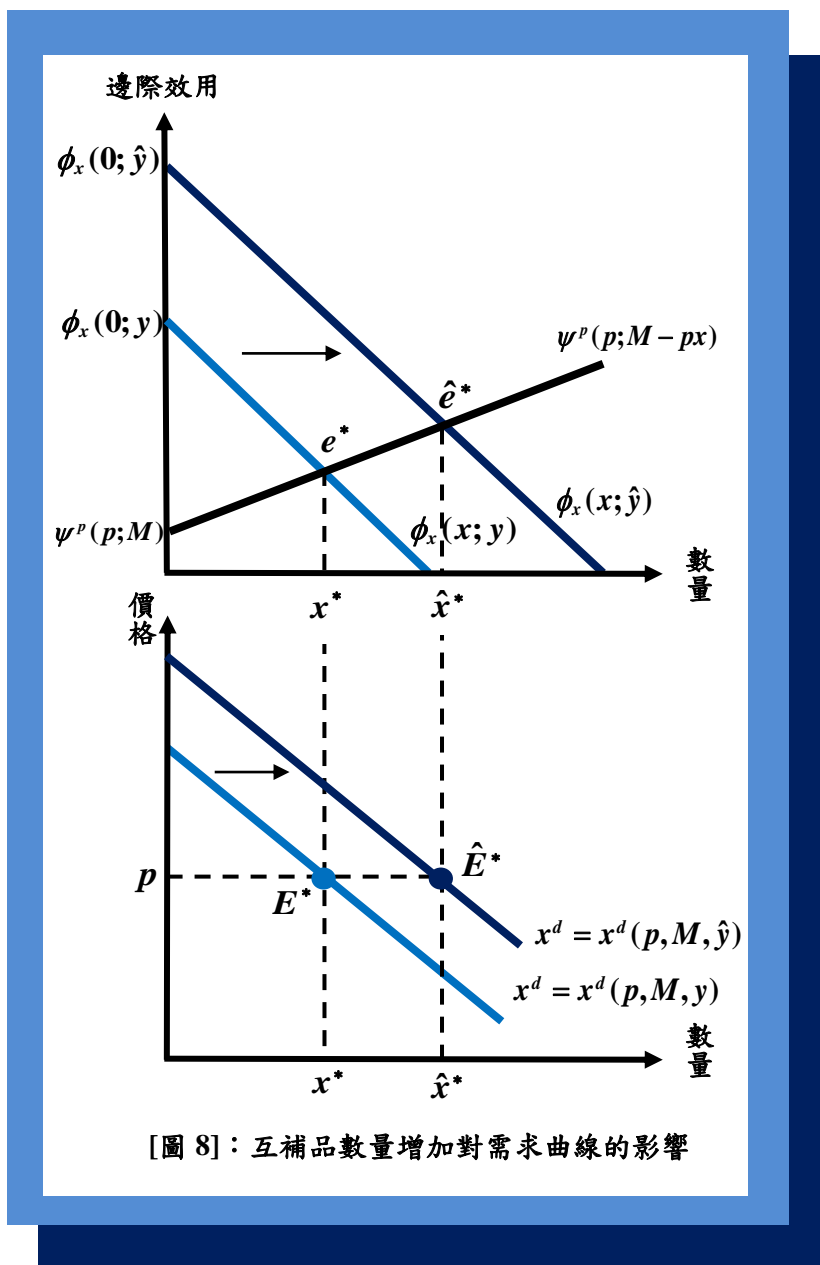








[圖 7]: 需求曲線的導出



[圖 8]：互補品數量增加對需求曲線的影響

