尋覓神秘未曾現蹤的替代品與互補品圖形 I

等序數邊際效用曲線

林忠正*
中央研究院經濟所研究員
國立政治大學財政系教授
國立交通大學經營管理研究所教授
台北市南港區(115-41)研究院路 2 段 128 號
中央研究院經濟所
電話: 886-2-2782-2791 轉 507
電子信箱: cclin@econ.sinica.edu.tw

開始撰稿-2015年12月1日
完稿時間-2015年12月31日
列印時間-2016年2月4日

*謝謝林曉珮助理非常有效率的協助，也很謝謝政大財政研究所江若妘同學的細心校稿。

尋覓神秘未曾現蹤的替代品與互補品圖形 I

等序數邊際效用曲線

[摘要] 正常的理論所對應的互補性圖形應該呈現一整套的完整面貌，它至少必須滿足下列的所有要求：譬如，如果負(固定)斜率的直線表示完全替代品，則負斜率曲線應是替代品，相對斜率不同的負斜率曲線的相對替代性程度應不同；並且，正(固定)斜率直線應是完全互補品，正斜率曲線應是互補品，相對斜率不同的正斜率曲線的相對互補性程度應不同；同時，垂直線與水平線應表示獨立品，垂直線與水平線應各有其各自的對稱性的角色要扮演。這是一個正常的理論，應該要通過的基本考驗或正常門檻，任何需求理論若無法完整地通過這樣的互補性關卡的整套考驗，就可以把它丟進歷史的灰燼中。在林忠正(2015)的〈錯把馮京當馬涼：當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解〉的文章中，已經明確地論述，現代理論無法通過此基本門檻，這基本標準對現代主流個體選擇理論是不可能超越的障礙。由現代個體理論的替代互補性圖解的荒謬性，你可以深刻體會想由極大化總序數效用理論出發來合理地容納與展現常識性的互補性概念，是一條走不通的死胡同。很難理解，這樣的理論為何會在 1930 年代產生翻天覆地的需求理論的革命，並且這場革命之後所誕生的理論一直被沿用至今。當你體會到現代理論連互補品與替代品都無法合理詮釋時，若這樣的理論會被再次革命掉，你就不會感到很奇怪了。在這篇文章中，我們將會親眼看到新跨界得與失的序數邊際效用分析法的互補性概念能輕輕鬆鬆地禁得起這樣的嚴格考驗，這就是為什麼我們主張新的序數邊際效用分析法可以輕鬆取代「極大化預算限制下總效用的分析法」，並且教科書必須改寫的再一次的支持證據。

JEL 分類: B120, B130, B210, D010

關鍵詞：跨界、得與失、序數、基數、邊際效用、等序數邊際效用

1. 神秘消失於直角的完全互補與直線的完全替代之間的圖形

在現代個體經濟學的書籍中，於討論商品之間的互補性與替代性問題時，一開始就會畫出兩個大家非常熟悉的無異曲線圖來表示兩種最極端的商品關係。一是以負斜率的直線無異曲線表示完全替代的商品關係，二是以直角轉彎的無異曲線來描述完全互補的商品關係。

似乎是，很多經濟學家都這樣教學生，很多相關的經濟學教科書都這樣撰寫。

這樣的標準表達方式，在大學一年級經濟學原理的課程訓練裡，就被灌輸進入未來經濟學家的腦袋中。假以時日，當這些努力用功的經濟學學生成為新一代的經濟學家後，也就再次複製自己的成長經驗與方式來形塑和培養下一代的經濟學者。新一代的經濟學教師於授課的課堂上、於撰寫教科書時、在出給學生的作業中、以及在命題各種不同性質的考卷上，再藉由這多重的洗腦管道，又將這樣的概念灌輸給下一代的經濟學家。

我觀察到有些人不只把這些圖形灌輸給經濟系的學生，還非常熱心地灌輸給非經濟與商學的理工科與醫科學生。

但是，在如此做之前，我們最好應該要停下來想一想，如果不能回答以下的一些直接衍生的對稱性問題，最好考慮不要再到不同的教室中畫這些圖形了，最好考慮不要再在教科書中呈現這樣的圖示了，也最好考慮不要再到處灌輸這些概念了。

這些對稱性的問題至少包含，以下幾項。

首先，既然負斜率的直線無異曲線刻劃完全替代的關係，那麼，正斜率的直線無異曲線不就應該刻劃完全互補的關係嗎？

但是，答案很清楚地，在現代理論中，我們都知道，完全互補的圖形卻是直角轉彎的無異曲線。

這是不是，一開始，就令人覺得很奇怪。或許你自己一直沒有注意到過。

第二，如果我們接受「負斜率的直線無異曲線是完全替代且直角轉彎的無異曲線是完全互補」，那直覺要求我們提問：獨立品的圖形要如何畫出呢？會是平行於水平軸的水平無異曲線或是平行於垂直軸的垂直無異曲線嗎？

答案是：這是不對的。

因為平行於水平軸的水平無異曲線表示,水平軸所描述的商品的數量對此消費者而言是完全無關緊要的；並且，平行於垂直軸的垂直無異曲線表示，垂直軸所描述的商品的數量對此消費者而言是完全不關心的。這些商品既不是愈多愈好的人們想要的東西，英文稱為 goods，我們可以把它稱為「好東西」，如乾淨的飲水、健康的食物與清潔的空氣等；同時，這些商品也不是愈多愈糟的人們不想要的東西，英文稱為 bads，我們可以把它稱為「壞東西」，如垃圾、噪音與汙水等。這些對消費者來說是「無所謂的東西」或「可有可無的東西」，是如，或許，對某人來說，今天的債券利率、昨天的天氣、電影影院放映的影片、百貨公司的營業額、路邊盛開的野花、睡在寒冷公園長椅上的無家遊民的感受…等數不盡的項目，對他而言都是不關心的無所謂的事物。因此，對消費者來說是「無所謂的東西」或「可有可無的東西」，就是此東西或商品帶給他的邊際效用是零的意思，並不需要牽涉到與另一種商品在消費上存在任何關聯性。

第三，既然完全替代是負斜率的直線無異曲線，那直覺要求我們提問：負斜率的非直線的無異曲線呢？不就是應該要是代表替代品嗎？並且,正斜率的非直線的無異曲線呢？不就是應該要是代表互補品嗎？

答案是：絕對不對的。這是大錯特錯的想法。

因為負斜率的無異曲線表示兩種商品的數量一項增加配合另一項減少之下,偏好程度或效用水準要維持固定不變，這表示這兩種商品必須同時是愈多愈好的人們想要的「好東西」(goods)，如令人喜愛的優雅的環境、燦爛的落日與悠揚的樂聲等；或是，這兩種商品必須同時是愈少愈好的人們不想要的「壞東西」(bads)，如令人厭惡的空氣汙染、輻射與交通壅塞等。因此,負斜率的無異曲線與互補品的圖示一點都連不上關係。

因為正斜率的無異曲線表示兩種商品的數量同時增加之下,偏好程度或效用水準要維持固定不變，這表示其中一種商品必須是愈多愈好的人們想要的「好東西」；同時，另一種商品必須是愈少愈好的人們不想要的「壞東西」。因此，正斜率的無異曲線與互補品的圖示一點都連不上關係。

第四,既然負斜率的直線無異曲線是完全替代且直角轉彎的無異曲線是完全互補，那直覺要求我們提問,那介於中間的負斜率的無異曲線是否可以用來表示非極端的商品

之間的替代與互補關係呢？

答案是：不對的。無異曲線的負斜率幅度是與替代互補性無準確關係的概念。為什麼？因為負斜率的無異曲線只表示兩種商品都是邊際效用為正值的「好東西」，或是兩種商品都是邊際效用為負值的「壞東西」。

接著，整理上述論述結果。在平面上兩種商品的圖形在簡單正常情況下只會出現幾種情況：正斜率、負斜率、垂直線、水平線。現代個體教科書教導我們：「負斜率的直線無異曲線是完全替代且直角轉彎的無異曲線是完全互補」，但是正斜率、負斜率、垂直線、以及水平線的無異曲線，如前所述，卻都與替代與互補性牽扯不上任何關係。那麼，非完全替代的替代性商品圖形、非完全互補的互補性商品圖形、以及獨立品的圖形，都跑到或躲到哪裡去了呢？怎麼可能會無緣無故地神祕地呈現真空狀態呢？這不是一種合格的理論應該呈現的健康樣貌。

在直角的完全互補與直線的完全替代圖形之間所呈現的真空狀態的現況，應該是在明示或暗示我們說：現在個體經濟學所採用的兩種極端圖示方式是不正確的，甚至現代個體選擇理論的主體就是不正確的。否則，如果現在個體經濟學所採用的兩種極端圖示方式是正確無誤的，那麼，事實變成：在這個世界上，兩種商品之間的關係，若不是完全互補品，就一定是完全替代品了，兩種極端中間不存在任何的商品關係了。

那就太荒謬了！

我不相信這種理論！會把它丟掉。當領悟到這些怪異現象之後，不會再採用這種理論去分析各式各樣多采多姿的真實現象，科學家應該有所為有所不為。

你會相信這樣的理論嗎？

由以上的提問與答案來看，我們發現這問題還真麻煩。這明顯地顯示無異曲線或總效用的概念，好像與替代互補的概念是非常不協調、甚至是非常不搭調或毫無牽連的分別來自兩個不同世界的概念。

只是，若真如此，這種種怪異現象，反過來使我們質疑，流行的「負斜率的直線無異曲線是完全替代且直角轉彎的無異曲線是完全互補」的概念是對的嗎？

看起來，也非常危險，仔細推敲起來，此一概念應該是錯誤的概念。

事實上，在林忠正(2015)的〈錯把馮京當馬涼：當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解〉的文章中，我已經清楚說明負斜率的無異曲線只表示兩種商品都是邊際效用為正值的「好東西」，或是兩種商品都是邊際效用為負值的「壞東西」。我們看不出來任何兩種「好東西」間必須要存在任何消費上的替代或互補性關係，也看不出來任何兩種「壞東西」間必須要存在任何消費上的替代或互補性關係。並且，我在該文中也已經說明「總是以固定比例一起消費的商品」的完全互補定義，與「L 型的無異曲線」，不是傳達同樣的一件事。

你看現代主流個體經濟學連替代品與互補品的圖形都不能完整地畫出來，現有的支離破碎的兩種極端圖形，背後又充滿奇奇怪怪的不協調性，你說現代個體經濟理論是不是非常怪異的分析架構呢？

現在這一套個體選擇經濟理論，事實上，也是現在經濟理論的主要根基性的理論，連替代品與互補品的問題都無法解釋。這就像天文學無法解釋在地球上為何會有日出日落的現象一樣，或是物理學無法解釋運動現象一樣，又如化學無法解釋燃燒的現象一樣。那樣的天文學、物理學與化學分析架構，是很難有天文學家、物理學家與化學家會相信與採用的，更不用說那樣的理論會有機會變成主流的極度流行的天文學與物理學分析典範。但回頭看看現代經濟理論，一套連替代品與互補品的圖形都畫不出來的理論，竟然會如水銀瀉地的無孔不入地進入難以盡數的現代經濟學家的腦袋中，成為他們的中心思想與看世界的方式，你想想看這真是有點或是非常荒謬。

事實上，在直角的完全互補與直線的完全替代的圖形之間所呈現的真空狀態，應該是在提醒我們，這些相關論述是不周全的，甚至，在明示或暗示我們說，現代個體理論可能出了非常根本性的大瑕疵。

因此，我們需要一套全新的從第一個假設就與現今理論不同的新理論，並且這套新理論非常基本的自我要求，就是能自自然然地帶給我們一整套新的很合乎直覺且很自然的替代與互補性的圖形。或許，這些圖形呈現的樣貌與種類會很複雜，但其背後的道理應該是非常簡單的、一致的且具有對稱性的。

我已經在林忠正(2015)的〈回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」：在

Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索〉的文章中，介紹過能合理輕鬆解決互補性難題的新理論。

現在，時機已經成熟了。

我就在這一篇文章中畫出一種新的替代互補的完整圖形。

2. 合理合格的互補性定義必須通過的嚴格關卡

一套正常的理論所對應的替代品與互補品的圖形，應該呈現一整套的完整面貌。其中，如果負的固定斜率的線表示兩商品是完全替代品，那很正常地，我們應該可以主張，在相同的條件下，負斜率曲線是替代；同時，固定的正斜率直線是完全互補，正斜率曲線是互補；並且，垂直的與水平的線會牽涉到獨立性商品，垂直與水平線應各有其各自的對稱性的角色要扮演。

並且，我們應該可以對一項合格理論提出進一步的要求。如果負斜率的曲線是替代品，那麼，兩條相對斜率不同的負斜率曲線，在其他條件一樣之下，應該能吐露兩條斜率不同的線所表示的相對替代性程度不同的意義；同樣地，如果正斜率的曲線是互補品，那麼，兩條相對斜率不同的正斜率曲線，在其他條件一樣之下，應該能顯示兩條斜率不同的線所表示的相對互補性程度不同的意義。

整理上述的論述，我們主張一個正常的理論，所對應的互補性圖形應該呈現一套的完整面貌，它至少必須滿足下列的所有的基本要求：

第一，如果固定的負斜率直線表示兩種商品是完全替代品，在其他情況不變下，固定的正斜率直線應表示兩種商品是完全互補品。

第二，如果負斜率曲線表示兩種商品是替代品，在其他情況不變下，正斜率直線應表示兩種商品是互補。

第三、如果負斜率曲線表示兩種商品是替代品，在其他情況不變下，相對斜率不同的負斜率曲線背後表示兩種商品各自的相對替代性程度不同。

第四，如果正斜率曲線表示兩種商品是互補品，在其他情況不變下，相對斜率不同的正斜率曲線背後表示兩種商品各自的相對互補性程度不同。

第五，如果垂直直線表示兩種商品呈現獨立品的關係，在其他情況不變下，水平直線表示兩種商品也呈現獨立品的關係，只是主客易位而已。

以上這些猜測，是一種先驗的或事先的理論猜測。一套理論必須能展現這樣的基本的對稱性特性，才能夠通過能成為一套合格的看世界的理論的最低門檻，通不過這項基本門檻檢驗的理論，無論過去在經濟學中的地位多麼崇高，無論過去在經濟學中多受偏愛，都應該可以把它丟進歷史的灰燼中。

更嚴格地說，這是一個正常的理論，應該要能夠通過的正常門檻，無法完整地通過這樣考驗的理論，一開始的時候，就我看來，就不需要理它了，也不適合用來分析這個什麼問題或那個甚麼問題了。竟然會變成經濟學的主流理論，這是很難令人理解的怪異的理論發展軌跡。

這論述看來很嚴厲，但從科學方法的觀點來看可一點都不嚴厲。或許，從理論應用者與跟隨者的眼光來看，還繼續採用此分析架構來進行各式各樣經濟問題的應用分析，唯一可以說出口的理由，應該是沒有更好的理論，所以只好退而求其次勉強拿來充充門面。

好，我們就來看看新理論能不能禁得起這樣的考驗。

在林忠正(2015)的〈錯把馮京當馬涼：當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解〉的文章中，我已經清楚說明以無異曲線的斜率來刻劃替代互補性的想法，是無法通過上述相同標準的檢驗。這項對稱性標準是指「如果負的固定斜率的無異曲線表示兩商品是完全替代品，那任何負斜率的無異曲線應該表示兩商品是替代品；從而正的固定斜率的無異曲線應該表示兩商品是完全互補品，且任何正斜率的無異曲線應該表示兩商品是互補品；而且水平與垂直的無異曲線應該表示其中一個商品是另一商品在消費上是中立性商品的意義」等等。

但是無異曲線的斜率的意義其實可以通過另一套完整的對稱性概念的基本門檻的考驗。這項標準是指「如果負斜率的無異曲線只是表示兩種商品都是邊際效用為正值的『好東西』，或是兩種商品都是邊際效用為負值的『壞東西』；正斜率的無異曲線只是表示兩種商品中一種是邊際效用為正值的『好東西』，而另一種是邊際效用為負值的『壞東西』；並且水平與垂直的無異曲線應該表示其中一個商品是邊際效用為零的中立性『可有可無

的東西』的意義。」

我已經明確說明，因此，無異曲線的斜率不是用來刻劃商品消費關係上的替代互補性的合宜概念，而是用來描述構成同一條無異曲線的兩種商品之間是由「好東西」、「壞東西」、中立性「可有可無的東西」的關係。現代理論裡「負斜率的直線無異曲線是完全替代且直角轉彎的無異曲線是完全互補」的概念，無疑地是一種令人難以置信的「錯將馮京當馬涼」離譜的集體錯誤。

接著，我們就來定義在新理論之下的替代與互補性的意義，並且看此新理論的互補性定義能不能通過必須能合理對應出一整套完整的圖形的基本考驗。或許，這些圖形呈現的樣貌與種類會很複雜，但其背後的道理應該是非常簡單的、一致的且具有對稱性的。

3. 由無異曲線 (等總效用曲線)到等邊際效用曲線

現代效用理論與個體選擇理論的基礎理論是序數效用理論，序數效用理論的第一個假設是人們有能力對不同的商品組合進行偏好排序，而給予愈喜好的商品組合愈高的效用數值，但不同偏好次序的商品組合之間的效用差異大小則不受規範或無所謂。每一個商品組合所對應的就是一個總效用數值，因此序數效用理論是一種由總效用出發，是一種在預算限制下極大化總效用的理論。

在總效用的基礎上，要在以兩種商品為兩軸的平面圖形上，畫出兩種商品之間的效用關係，我們很自然會想到等效用曲線(the iso-utility curve)，這也就是所謂的無異曲線(the indifference curve)。

但是，這個思維方向事實上無益於了解與畫出兩種商品之間在消費上的替代與互補關係。因為，無異曲線斜率的正負是取決於兩種商品的邊際效用的比值，即兩個邊際效用的正負符號，而邊際效用的正負是取決於兩種商品是「好東西」或是「壞東西」。例如，負斜率無異曲線只表示兩種商品都是邊際效用為正值的「好東西」，或是兩種商品都是邊際效用為負值的「壞東西」。正斜率無異曲線只表示兩種商品中一種是邊際效用為正值的「好東西」，而另一種商品是邊際效用為負值的「壞東西」。我們看不出來「好東西」與「壞東西」之間的不同組合必須要存在任何消費上的替代或互補性關係。並且，在林忠正，(2015)，〈錯把馮京當馬涼：當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解〉文章中，也已經說明「總是以固定比例一起消費的商品」的完全互補定義，與「L 型的無異曲線」，

不是傳達同樣的一件事。這是一種「錯把馮京當馬涼」的論述。

因此，承載總效用概念的無異曲線，事實上，無法完整甚至毫無傳達兩種商品之間消費上的替代與互補關係，所以合宜的替代與互補圖形一直到現在還是神秘的未曾洩露蹤跡的圖形。一門已經發展了兩百多年的自我號稱是科學的經濟學，到現在連替代品與互補品這麼基本的概念的圖形都毫無蹤跡，實在很難令人理解與接受。

現在我們有機會或有希望能夠藉由林忠正等所發展的新理論，畫出合宜的兩種商品之間消費上的替代與互補關係的圖形嗎？

新的「跨界的得與失的序數邊際效用分析法」的基礎理論是序數的邊際效用理論，其第一個假設是人有能力對一項交換或交易行為的「一得」與「一失」進行跨越不同價值觀的偏好排序。並且消費者是採取邊際摸索的決策方式，也就是，例如，當消費者在考慮是否購買某特定的商品數量時，若對某一(邊際)單位商品的「一得」的偏好或效用高於「一失」(在此指單位價格)，則會購買此單位商品並且會繼續考慮增加購買下一單位；若對某一(邊際)單位商品的「一得」的偏好或效用低於「一失」，則不會購買此單位，並且會考慮減少購買數量。換句話說，消費者會一直購買到對某一(邊際)單位商品的「一得」的偏好或效用等於「一失」的地步。

此時，人們有能力對一項交換或交易行為的「一得」與「一失」進行跨越不同價值觀的偏好排序，而給予愈喜好的「一得」與「一失」選項愈高的效用數值，但不同偏好次序的「一得」與「一失」選項之間的效用差異大小則不受規範或無所謂。

由於每一單位商品「一得」與「一失」的效用，不是總效用的概念，而是序數邊際效用或類似於序數邊際效用。新的序數邊際效用理論是一種由邊際效用出發的理論，是一種以邊際摸索的決策方式來追求效用極大的理論。

在商品的邊際效用的基礎上，要在以兩種商品為兩軸的平面圖形上，畫出兩種商品之間的效用關係，我們很自然會想到**等邊際效用曲線**(the iso-marginal-utility curve)或**等序數邊際效用曲線**(the iso-ordinal-marginal-utility curve)。

事實上，我們很快會發現，等邊際效用曲線斜率的正負與兩種商品的交叉邊際效用項的正負息息相關，而兩種商品的交叉邊際效用項的正負符號正好是捕捉到兩種商品在消費上互相影響的效果的數學變項。因此，等邊際效用曲線的思維方向有益於了解與畫

出兩種商品之間在消費上的替代與互補關係。

接著，我們就來探索與繪製等邊際效用曲線與商品的替代與互補關係。而讓神秘的未曾洩漏蹤跡的互補性曲線首次現身。

4. 等邊際效用曲線

在新的「跨界的得與失的序數邊際效用分析法」中，商品 x 的邊際效用函數的定義是：

(1) $$\phi_x(x;y);\ \phi_{xx} \gtrless 0,\ \phi_{xy} \gtrless 0$$

另外，對 x 商品而言，y 商品是其互補品、替代品、獨立品的定義分別是：

(2a) $\phi_{xy} > 0 \Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的互補品

(2b) $\phi_{xy} < 0 \Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的替代品

(2c) $\phi_{xy} = 0 \Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的獨立品

接著，x 商品的等邊際效用曲線的定義：

(3) $$\phi_x(x;y) = c;\ \phi_{xx} \gtrless 0,\ \phi_{xy} \gtrless 0$$

也就是，x 商品的等邊際效用曲線 $\phi_x(x;y) = c$ 的經濟意義，就是構成 x 商品的邊際效用水準的各種不同的兩種商品組合 (x, y) 在 (x, y) 平面上所連成的軌跡。

對 x 商品的等邊際效用曲線 $\phi_x(x;y) = c$ 進行全微分：

(4) $$\phi_{xx}dx + \phi_{xy}dy = dc = 0$$

x 商品的等邊際效用曲線斜率：

(5) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}} \gtrless 0;\ \phi_{xy} \gtrless 0,\ \phi_{xx} \gtrless 0$$

換句話說，x 商品的等邊際效用曲線斜率取決於 x 商品的兩項邊際效用的變化方向 $\phi_{xx} \gtrless 0$

與$\phi_{xy} \gtreqless 0$。$\phi_{xx} \gtreqless 0$的正、零、或是負，分別描述 x 商品的邊際效用是遞增、不變、或是遞減的情況。$\phi_{xy} \gtreqless 0$的正、零、或是負，分別刻劃 y 商品是 x 商品的互補品、獨立品、或是替代品的情境。

接下來，我們有兩種分類方式來進行後續的分析。第一種是先區分 x 商品是邊際效用遞減、遞增、不變等三種不同的面向；再依序分別在這三種不同面向下，分析 y 商品是 x 商品的互補品、替代品、或是獨立品等的情境。反過來，第二種是先區分 y 商品是 x 商品的互補品、替代品、或是獨立品等三種不同的面向；再依序分別在這三種不同面向下，分析 x 商品是邊際效用遞減、遞增、不變等的情境。

由於，本文的主要目的是要展示在相同的情境或條件之下，互補品、替代品、以及獨立品三種不同的情況將呈現的對稱性之美；而不要在相同的情境或條件之下，商品是邊際效用遞減、遞增、不變三種不同的面向將呈現的對稱性。

因此，我們可以採取先區分 x 商品的邊際效用分別是遞減、遞增、或是不變等三種情況，再分析與繪製 y 商品分別是 x 商品的互補品、獨立品、或是替代品的 x 商品的等邊際效用曲線。我們也會進一步展示，商品的邊際效用先遞增再遞減的整合狀態下的互補性圖示。

5. 商品邊際效用遞減的等邊際效用曲線

在 x 商品的邊際效用遞減的情況下，x 商品的等序數邊際效用曲線的斜率：

(6) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}} \gtreqless 0;\ \phi_{xy} \gtreqless 0,\ 若\ \phi_{xx} < 0$$

在 x 商品的邊際效用遞減的情況下，對 x 商品而言，y 商品分別是其互補品、替代品、獨立品時，等邊際效用線所各自對應的斜率：

(7a) $\phi_{xy} > 0 \Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的互補品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用線斜率為正

(7b) $\phi_{xy} < 0 \Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的替代品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用線斜率為負

(7c) $\phi_{xy} = 0 \Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的獨立品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率無窮大 (垂直)

我們可以依據上述的數學推導結果，以單一的與群組的等邊際效用線圖，來呈現神秘的未曾洩漏蹤跡的替代與互補圖形了。

在〔圖 1〕中，於兩種商品(x,y)平面上，所繪製的正斜率等邊際效用線$\phi_x(x;y)=c$，就表示在x商品邊際效用遞減$\phi_{xx}<0$，且y商品是x商品消費上的互補品$\phi_{xy}>0$的圖形。其經濟意義顯示，在x商品邊際效用遞減$\phi_{xx}<0$且y商品是x商品消費上的互補品$\phi_{xy}>0$的情境下，x商品數量增加會使x商品邊際效用ϕ_x減少，y商品數量增加會使x商品邊際效用ϕ_x增加，因此比較大數量的x商品配合比較大數量的y商品，可以使x商品的等序數邊際效用曲線維持不變。所以，x商品的邊際效用線$\phi_x(x;y)=c$為正斜率的線。

進一步地，〔圖 2〕表示，因為x商品邊際效用遞減$\phi_{xx}<0$，這表示x商品數量愈多，x商品的邊際效用愈低，因此愈往左邊(上方)的x商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高。換個角度來思考，因為y商品是x商品消費上的互補品$\phi_{xy}>0$，這表示y商品數量愈多，x商品的邊際效用愈高，因此愈往左邊(上方)的x商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高。因此，從這兩角度來看圖形的變化方向，所獲得的結果是一致的。

依此類推，在〔圖 3〕中，於兩種商品(x,y)平面上，所繪製的負斜率等邊際效用線$\phi_x(x;y)=c$，就表示x商品邊際效用遞減$\phi_{xx}<0$，且y商品是x商品消費上的替代品$\phi_{xy}<0$的圖形。其經濟意義顯示，在x商品邊際效用遞減$\phi_{xx}<0$且y商品是x商品消費上的替代品$\phi_{xy}<0$的情境下，x商品數量增加會使x商品邊際效用ϕ_x減少，y商品數量減少會使x商品邊際效用ϕ_x增加，因此比較大數量的x商品配合比較小數量的y商品，可以使x商品的等序數邊際效用曲線維持不變。所以，x商品的邊際效用線$\phi_x(x;y)=c$為負斜率的線。

進一步地，〔圖 4〕表示，因為x商品邊際效用遞減$\phi_{xx}<0$，這表示x商品數量愈多，x商品的邊際效用愈低，因此愈往右邊(上方)的x商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈低。換個角度來思考，因為y商品是x商品消費上的替代品$\phi_{xy}<0$，這表示y商品的數量愈多，x商品的邊際效用愈低，因此愈往右邊(上方)的x商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈低。因此，從這兩角度來看圖形的變化方向，所獲得的結果是一致的。

再進一步類推，在〔圖 5〕中，於兩種商品(x,y)平面上，所繪製的垂直的等邊際效用線$\phi_x(x;y)=c$，就表示x商品邊際效用遞減$\phi_{xx}<0$，且y商品是x商品消費上的獨

立品$\phi_{xy}=0$的圖形。其經濟意義顯示，在x商品邊際效用遞減$\phi_{xx}<0$且y商品是x商品消費上的獨立品$\phi_{xy}=0$的情境下，因為y商品數量的變動對x商品邊際效用ϕ_x沒有影響，因此x商品的序數邊際效用大小獨立於y商品數量的大小，只取決於x商品數量的大小，x商品的等序數邊際效用曲線是垂直線。所以，x商品的邊際效用線$\phi_x(x;y)=c$為垂直。

進一步地，〔圖 6〕表示，因為x商品邊際效用遞減$\phi_{xx}<0$，這表示x商品數量愈多，x商品的邊際效用愈低，因此愈往右邊的x商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈低。換個角度來思考，因為y商品是x商品消費上的獨立品$\phi_{xy}=0$，這表示y商品的數量愈多，垂直的x商品的邊際效用線不變，這表示垂直的等邊際效用線$\phi_x(x;y)=c$是維持同樣的邊際效用水準。因此，從這兩角度來看圖形的變化方向，所獲得的結果是互相協調的。

6. 商品邊際效用遞增的等邊際效用曲線

若x商品的邊際效用遞增會出現如何的狀態？此時x商品的等邊際效用曲線的斜率變成：

(8) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}}\gtrless 0;\ \ \phi_{xy}\lessgtr 0,\ 若\,\phi_{xx}>0$$

在x商品的邊際效用遞增$\phi_{xx}>0$的情況下，對x商品而言，y商品分別是其互補品、替代品、獨立品時，等邊際效用線所各自對應的斜率：

(9a) $\phi_{xy}>0\Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的互補品$\Leftrightarrow$等邊際效用線斜率為負

(9b) $\phi_{xy}<0\Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的替代品$\Leftrightarrow$等邊際效用線斜率為正

(9c) $\phi_{xy}=0\Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的獨立品$\Leftrightarrow$等邊際效用曲線斜率無窮大 (垂直)

我們可以依據上述的數學推導結果，以單一的與群組的等邊際效用線圖，來呈現神秘的未曾洩漏蹤跡的替代與互補圖形了。

在〔圖 7〕中，於兩種商品(x,y)平面上，所繪製的負斜率等邊際效用線

$\phi_x(x;y)=c$，就表示在 x 商品的邊際效用遞增 $\phi_{xx}>0$，且 y 商品是 x 商品消費上的互補品 $\phi_{xy}>0$ 的圖形。其經濟意義顯示，在 x 商品邊際效用遞遞增 $\phi_{xx}>0$ 且 y 商品是 x 商品消費上的互補品 $\phi_{xy}>0$ 的情境下，x 商品數量增加會使 x 商品邊際效用 ϕ_x 增加，y 商品數量減少會使 x 商品邊際效用 ϕ_x 減少，因此比較大數量的 x 商品配合比較小數量的 y 商品，可以使 x 商品的等序數邊際效用曲線維持不變。所以，x 商品的邊際效用線 $\phi_x(x;y)=c$ 為負斜率的線。

進一步地，〔圖 8〕表示，因為 x 商品邊際效用遞增 $\phi_{xx}>0$，這表示 x 商品數量愈多， x 商品的邊際效用愈高，因此愈往右邊(上方)的 x 商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高。換個角度來思考，因為 y 商品是 x 商品消費上的互補品 $\phi_{xy}>0$，這表示 y 商品的數量愈多，負斜率的 x 商品的邊際效用愈高，因此愈往右邊(上方)的 x 商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高。因此，從這兩角度來看圖形的變化方向，所獲得的結果是一致的。

依此類推，在〔圖 9〕中，於兩種商品 (x,y) 平面上，所繪製的正斜率等邊際效用線 $\phi_x(x;y)=c$，就表示在 x 商品的邊際效用遞增 $\phi_{xx}>0$，且 y 商品是 x 商品的替代品 $\phi_{xy}<0$ 的圖形。其經濟意義顯示，在 x 商品邊際效用遞遞增 $\phi_{xx}>0$ 且 y 商品是 x 商品消費上的替代品 $\phi_{xy}<0$ 的情境下，x 商品數量增加會使 x 商品邊際效用 ϕ_x 增加，y 商品數量增加會使 x 商品邊際效用 ϕ_x 減少，因此比較大數量的 x 商品配合比較大數量的 y 商品，可以使 x 商品的等序數邊際效用曲線維持不變。所以，x 商品的邊際效用線 $\phi_x(x;y)=c$ 為正斜率的線。

進一步地，〔圖 10〕表示，因為 x 商品邊際效用遞增 $\phi_{xx}>0$，這表示 x 商品數量愈多， x 商品的邊際效用愈高，因此愈往右邊(下方)的 x 商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高。換個角度來思考，因為 y 商品是 x 商品消費上的替代品 $\phi_{xy}<0$，這表示 y 商品的數量愈多，x 商品的邊際效用愈低，因此愈往右邊(下方)的 x 商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高。因此，從這兩角度來看圖形的變化方向，所獲得的結果是一致的。

再進一步類推，在〔圖 11〕中，於兩種商品 (x,y) 平面上，所繪製的垂直等邊際效用線 $\phi_x(x;y)=c$，就表示在 x 商品的邊際效用遞增 $\phi_{xx}>0$，且 y 商品是 x 商品消費上的獨立品 $\phi_{xy}=0$ 的圖形。其經濟意義顯示，在 x 商品邊際效用遞增 $\phi_{xx}>0$，且 y 商品是 x

商品消費上的獨立品$\phi_{xy}=0$的情境下，因為y商品數量的變動對x商品邊際效用ϕ_x沒有影響，因此x商品的序數邊際效用大小獨立於y商品數量的大小，只取決於x商品數量的大小，x商品的等序數邊際效用曲線是垂直線。所以，x商品的邊際效用線$\phi_x(x;y)=c$為垂直。

進一步地，〔圖 12〕表示，因為x商品邊際效用遞增$\phi_{xx}>0$，這表示x商品數量愈多，x商品的邊際效用愈高，因此愈往右邊的x商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高。換個角度來思考，因為y商品是x商品消費上的獨立品$\phi_{xy}=0$，這表示y商品的數量愈多，垂直的x商品的等邊際效用線不變，這表示垂直的等邊際效用線$\phi_x(x;y)=c$是維持同樣的邊際效用水準。因此，從這兩角度來看圖形的變化方向，所獲得的結果是能互相搭配的。

7. 商品的邊際效用不變的等邊際效用曲線

若商品的邊際效用不變會出現如何的狀態？

等邊際效用曲線的斜率：

(10) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}}=0;\ \phi_{xy}>(<)0,\ 若\ \phi_{xx}=0$$

在x商品的邊際效用不變$\phi_{xx}=0$的情況下，對x商品而言，y商品分別是其互補品、替代品、獨立品時，等邊際效用線所各自對應的斜率：

(11a) $\phi_{xy}>0\Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的互補品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用線斜率為零(水平線)

(11b) $\phi_{xy}<0\Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的替代品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用線斜率為零(水平線)

(11c) $\phi_{xy}=0\Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的獨立品 $\Leftrightarrow$ 沒定義

我們可以依據上述的數學推導結果，以單一的與群組的等邊際效用線圖，來呈現神秘的未曾洩漏蹤跡的替代與互補圖形了。

在〔圖 13〕中，於兩種商品(x,y)平面上，所繪製的斜率為零(水平線)等邊際效用線$\phi_x(x;y)=c$，就表示在x商品的邊際效用不變$\phi_{xx}=0$，且y商品是x商品消費上的互

補品$\phi_{xy}>0$的圖形。其經濟意義顯示，在 x 商品邊際效用不變$\phi_{xx}=0$且 y 商品是 x 商品消費上的互補品$\phi_{xy}>0$的情境下，x 商品數量增減不會改變 x 商品邊際效用ϕ_{x}，x 商品邊際效用大小因此只取決於 y 商品的大小。所以，x 商品的邊際效用線$\phi_{x}(x;y)=c$為斜率為零的水平線。

進一步地，〔圖 14〕表示，因為 x 商品邊際效用不變$\phi_{xx}=0$，這表示 x 商品數量愈多， x 商品的等邊際效用維持不變。換個角度來思考，因為 y 商品是 x 商品消費上的互補品$\phi_{xy}>0$，這表示 y 商品的數量愈多，x 商品的邊際效用愈高，因此愈往上方的 x 商品水平線等邊際效用線的邊際效用水準愈高。因此，從這兩角度來看圖形的變化方向，所獲得的結果是可以互相搭配的。

依此類推，於兩種商品(x,y)平面上，所繪製的水平線的等邊際效用線$\phi_{x}(x;y)=c$，就表示在 x 商品的邊際效用不變$\phi_{xx}=0$，且 y 商品是 x 商品的替代品$\phi_{xy}<0$的圖形，是與〔圖 14〕完全相同。因為，究其經濟意義，在 x 商品邊際效用不變$\phi_{xx}=0$且 y 商品是 x 商品消費上的替代品$\phi_{xy}<0$的情境下,x 商品數量增減不會改變 x 商品邊際效用ϕ_{x}，x 商品邊際效用大小因此只取決於 y 商品數量的大小。所以，x 商品的邊際效用線$\phi_{x}(x;y)=c$為斜率為零的水平線。

進一步地，〔圖 15〕表示，因為 x 商品邊際效用不變$\phi_{xx}=0$，這表示 x 商品數量愈多， x 商品的際效用維持不變，這表示 x 商品水平線的等邊際效用線的邊際效用水準不變。換個角度來思考，因為 y 商品是 x 商品消費上的替代品$\phi_{xy}<0$，這表示 y 商品的數量愈多，x 商品的邊際效用愈低，因此愈往下方(上方)的 x 商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高(愈低)。因此，從這兩角度來看圖形的變化方向，所獲得的結果是可以互相搭配的。

再進一步類推，在〔圖 16〕中，於兩種商品(x,y)平面上，所繪製的水平線等邊際效用線$\phi_{x}(x;y)=c$的經濟意義，就表示在 x 商品的邊際效用不變$\phi_{xx}=0$，且 y 商品是 x 商品消費上的獨立品$\phi_{xy}=0$的圖形。整個平面都構成所謂的一個無異曲線和無異曲面了！因為，究其經濟意義，在 x 商品邊際效用不變$\phi_{xx}=0$且 y 商品是 x 商品消費上的獨立品$\phi_{xy}=0$的情境下，x 商品數量增減不會改變 x 商品邊際效用ϕ_{x}，y 商品數量增減也不會改變 x 商品邊際效用ϕ_{x}，因此 x 商品邊際效用大小與 x 商品與 y 商品數量大小完全無關。所以，整個平面都構成所謂的一個無異曲線和無異曲面。

8. 商品的邊際效用先遞增再遞減的等邊際效用曲線

整合上述的分析結果,我們現在來分析一種商品的序數邊際效用先遞增再遞減的情況。

此時,x 商品的等邊際效用曲線的斜率呈現:

(12a) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}} \gtrless 0$ 先為負再為正;若 $\phi_{xy}>0$ 且 ϕ_x 先遞增再遞減

(12a) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}} \gtrless 0$ 先為正再為負;若 $\phi_{xy}<0$ 且 ϕ_x 先遞增再遞減

(12c) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}}=\pm\infty$ 始終為無窮大(垂直線);若 $\phi_{xy}=0$ 且 ϕ_x 先遞增再遞減

換句話說,互補品與替代品的等邊際效用曲線所對應的斜率:

(13a) $\phi_{xy}>0 \Leftrightarrow y$ 是 x 商品的互補品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率先為負再轉為正的 U 型曲線

(13b) $\phi_{xy}<0 \Leftrightarrow y$ 是 x 商品的替代品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率先為正再轉為負的倒 U 曲線

(13c) $\phi_{xy}=0 \Leftrightarrow y$ 是 x 商品的獨立品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線為斜率無窮大的垂直線

若商品的邊際效用先遞增後遞減,等邊際效用曲線的群組圖形,由上述的分析可以統合成如下的圖形。

在〔圖 17〕中,於兩種商品 (x,y) 平面上,所繪製的斜率先為負再轉為正的 U 型曲線的等邊際效用線 $\phi_x(x;y)=c$,這表示在 x 商品的邊際效用先遞增 $\phi_{xx}>0$ 再遞減 $\phi_{xx}<0$,且 y 商品是 x 商品消費上的互補品 $\phi_{xy}>0$ 的圖形。

進一步地,〔圖 18〕表示,斜率先為負再轉為正的 U 型曲線的等邊際效用線,因為 y 商品是 x 商品消費上的互補品 $\phi_{xy}>0$,這表示 y 商品的數量愈多,U 型的邊際效用線的邊際效用數值愈高,愈因此往上方的 x 商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高。

依此類推,在〔圖 19〕中,於兩種商品 (x,y) 平面上,所繪製的斜率先為正再轉為負的倒 U 曲線的等邊際效用線 $\phi_x(x;y)=c$,這表示在 x 商品的邊際效用先遞增 $\phi_{xx}>0$ 再

遞減$\phi_{xx}<0$，且y商品是x商品的替代品$\phi_{xy}<0$的圖形。

進一步地，〔圖 20〕表示，斜率先為正再轉為負的倒 U 型曲線的等邊際效用線，因為y商品是x商品消費上的替代品$\phi_{xy}<0$，這表示y商品的數量愈多，倒 U 型的等邊際效用線的邊際效用數值愈低，因此，愈往下方x商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高。

再進一步類推，在〔圖 21〕中，於兩種商品(x, y)平面上，所繪製的垂直的等邊際效用線$\phi_x(x; y) = c$，就表示x商品的邊際效用先遞增$\phi_{xx}>0$再遞減$\phi_{xx}<0$，且y商品是x商品消費上的獨立品$\phi_{xy}=0$的圖形。

進一步地，〔圖 22〕表示，因為x商品的邊際效用遞增$\phi_{xx}>0$，這表示x商品的數量愈多，垂直的x商品的邊際效用愈高，因此愈往右邊的x商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高。但x商品的邊際效用在跨過邊際效用為零$\phi_{xx}=0$所對應的數量時，x商品的邊際效用轉為遞減$\phi_{xx}<0$，所以跨過此點之後，x商品的數量愈多，垂直的x商品的邊際效用愈低，x 商品的邊際效用線的邊際效用水準愈往右(左)方愈低(高)。整理上述結果，這等於是說，x商品的邊際效用線所對應的邊際效用水準在其邊際效用為零$\phi_{xx}=0$的數量時達到最大，往左右兩邊調整時垂直線背後的邊際效用水準都會下降。謝謝我的研究助理林曉珮幫我畫出這部分的圖形，否則我不知道我是否能順利地畫出此很特別的圖形。

9. 等邊際效用曲線相對斜率大小的意義

在x商品邊際效用遞減$\phi_{xx}<0$且y商品是x商品消費上的互補品$\phi_{xy}>0$的情境下，x商品數量增加會使x商品邊際效用ϕ_x減少，y商品數量增加會使x商品邊際效用ϕ_x增加，因此比較大數量的x商品配合比較大數量的y商品，可以使x商品的等序數邊際效用曲線維持不變。所以，x 商品的等邊際效用線$\phi_x(x; y) = c$為正斜率的線。〔圖 1〕中所繪製的正斜率等邊際效用線就呈現這樣的情境。

我們現在想分析與表現的問題是：如果正斜率曲線表示兩種商品是互補品，在其他情況不變下，相對斜率不同的正斜率曲線背後表示兩種商品各自的相對互補性程度不同。

例如，消費者對商品x與商品y所構成的等邊際效用線斜率為：

(14) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}} > 0，若\ \phi_{xy} > 0$$

並且，同一位消費者對商品 x 與商品 z 所構成的等邊際效用線斜率為：

(15) $$\frac{dz}{dx} = -\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xz}} > 0，若\ \phi_{xz} > 0$$

我們進一步假設，兩者斜率的相對大小為：

(16) $$\frac{dz}{dx} = -\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xz}} > \frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}} > 0$$

因為兩項斜率都是正值，比較大的正值，所對應的無異曲線的斜率是比較陡的圖形。

當商品 x 增加一單位時，要維持在原來的等邊際效用線之下，商品 z 增加的數量會比商品 y 增加的數量多，也就是所必須增加的數量商品 z 比商品 y 多。此圖，如〔圖 23〕所示。

又如，當商品 x 減少一單位時，要維持在原來的等邊際效用線之下，商品 z 減少的數量會比商品 y 減少的數量多，也就是所必須減少的數量商品 z 比商品 y 多。此圖，如〔圖 24〕所示。

接著，我們討論等邊際效用線為負斜率的狀況。

在 x 商品邊際效用遞減 $\phi_{xx} < 0$ 且 y 商品是 x 商品消費上的替代品 $\phi_{xy} < 0$ 的情境下，x 商品數量增加會使 x 商品邊際效用 ϕ_x 減少，y 商品數量減少會使 x 商品邊際效用 ϕ_x 增加，因此比較大數量的 x 商品配合比較小數量的 y 商品，可以使 x 商品的等序數邊際效用曲線維持不變。所以 x 商品的邊際效用線 $\phi_x(x;y) = c$ 為負斜率的線。〔圖 3〕中所繪製的負斜率等邊際效用線就呈現這樣的情境。

我們現在想分析與表現的問題是：如果負斜率曲線表示兩種商品是替代品，在其他情況不變下,相對斜率不同的負斜率曲線背後表示兩種商品各自的相對替代性程度不同。

例如，消費者對商品 x 與商品 y 所構成的等邊際效用線斜率為：

(17) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}} < 0，若\ \phi_{xy} < 0$$

並且，同一位消費者對商品 x 與商品 z 所構成的等邊際效用線斜率為：

(18) $$\frac{dz}{dx} = -\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xz}} < 0 \text{，若 } \phi_{xz} < 0$$

我們進一步假設，兩者斜率的相對大小為：

(19) $$0 > \frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}} > \frac{dz}{dx} = -\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xz}}$$

因為兩項斜率都是負值，比較小的負值，其實，絕對值是比較大的數值。比較小的負值，所對應的等邊際效用線斜率其實是比較陡的圖形。

在前述的討論之下，當商品 x 增加一單位時，要維持在原來的等邊際效用線之下，商品 z 減少的數量會比商品 y 減少的數量多，也就是所必須放棄的數量商品 z 比商品 y 多。此圖，如〔圖 25〕所示。

又如，當商品 x 減少一單位時，要維持在原來的等邊際效用線之下，商品 z 增加的數量會比商品 y 增加的數量多，也就是所必須補償的數量商品 z 比商品 y 多。此圖，如〔圖 26〕所示。

10. 單調轉換

對 x 商品的等邊際效用曲線進行正向單調轉換：

(20) $$\Phi_x(x;y) = F(\phi_x(x;y)) \text{；} F' > 0 \text{，} F'' \gtrless 0$$

也就是，原先的邊際效用函數 $\phi_x(x;y)$，經過 $F(\phi_x(x;y))$ 函數的轉換後，所獲得的新邊際效用函數 $\Phi_x(x;y)$。正向單調轉換的特性反映在 $F' > 0$ 的特性上，也就是原來相對比較大的邊際效用數值經過轉換之後，相對的邊際效用數值還是比較大。除此之外，正向單調轉換並不要求轉換前後相對大小的差異必須維持固定，所以 $F'' \gtrless 0$ 皆可。

x 商品的等邊際效用曲線經過正向單調轉換之後，會直接衍生以下的性質：

(21) $$\Phi_{xx}(x;y) = F'\phi_{xx}(x;y)$$

(22) $$\Phi_{xy}(x;y) = F'\phi_{xy}(x;y)$$

因此，得到 $sign\Phi_{xy} = sign\phi_{xy}$ 的結果，也就是，單調轉換不會改變替代互補的定義，所以在林忠正的序數的邊際效用分析法中，所採取的邊際效用交叉項的正負為互補品與替代品定義，是一種序數效用而不是基數效用的定義。

這與 Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto 以總效用的二次微分項正負符號的互補品與替代品定義，是一種基數效用而不是序數效用的定義，是非常不一樣的概念。換句話說，表面上看來，我所用的定義與 Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto 的定義一樣都是立基於邊際效用交叉項的正負，但事實上，兩者在思維方式上可能是非常不同的。林忠正是直接由邊際效用出發的理論，邊際效用交叉項的正負可能是一種直接由邊際效用出發的理論。在直接由總效用出發的理論中，就像 Hicks 和 Allen 以及其他學者所提出的批評，邊際效用交叉項的互補性定義在序數效用的概念之下，是必須被丟棄的無意義的定義。

換句話說，在林忠正的序數的邊際效用分析法中，單調轉換後不會改變序數邊際效用交叉項的正負，也就是：

(23a) $\phi_{xy} > 0 \Leftrightarrow \Phi_{xy} > 0 \Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的互補品

(23b) $\phi_{xy} < 0 \Leftrightarrow \Phi_{xy} < 0 \Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的替代品

(23c) $\phi_{xy} = 0 \Leftrightarrow \Phi_{xy} = 0 \Leftrightarrow y$ 商品是 x 商品的獨立品

對單調轉換後的等邊際效用曲線進行全微分，可得：

(24) $$\Phi_{xx}dx + \Phi_{xy}dy = F'\phi_{xx}dx + F'\phi_{xy}dy = dc = 0$$

等邊際效用曲線的斜率：

(25) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_{xy}} = -\frac{F'\phi_{xx}}{F'\phi_{xy}} = -\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}} \gtreqless 0;\quad sign(-\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_{xy}}) = sign(-\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}}) \gtreqless 0$$

單調轉換不會改變 x 商品的等邊際效用曲線斜率，因為：

(26a) $sign(-\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_{xy}}) = sign(-\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}}) > 0 \Leftrightarrow$ 單調轉換前後的等邊際效用曲線斜率都為正

(26b) $sign(-\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_{xy}}) = sign(-\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}}) < 0 \Leftrightarrow$ 單調轉換前後的等邊際效用曲線斜率都為負

(26c) $sign(-\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_{xy}}) = sign(-\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}}) = 0 \Leftrightarrow$ 單調轉換前後的等邊際效用曲線皆為水平線

(26d) $sign(-\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_{xy}}) = sign(-\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}}) = \pm\infty \Leftrightarrow$ 單調轉換前後的等邊際效用曲線皆為垂直線

簡言之，在新理論的常識性互補性可以通過正向單調轉換關卡的考驗，此互補性定義是一種序數的而不是基數的概念。

11. 另一種商品的替代互補圖示

商品 y 的邊際效用函數的定義是：

(27) $\varphi_y(y;x) = c$； $\varphi_{yy} \gtreqless 0$， $\varphi_{yx} \gtreqless 0$

對 y 商品而言，x 商品是其互補品、替代品、獨立品的定義分別是：

(28a) $\varphi_{yx} > 0 \Leftrightarrow x$ 商品是 y 商品的互補品

(28b) $\varphi_{yx} < 0 \Leftrightarrow x$ 商品是 y 商品的替代品

(28c) $\varphi_{yx} = 0 \Leftrightarrow x$ 商品是 y 商品的獨立品

對商品 y 的邊際效用函數進行全微分：

(29) $\varphi_{yx}dx + \varphi_{yy}dy = dc = 0$

y 商品的等邊際效用曲線斜率：

(30) $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_{yx}}{\varphi_{yy}} \gtreqless 0$； $\varphi_{yx} \gtreqless 0$ 且 $\varphi_{yy} \gtreqless 0$

換句話說,y 商品的等邊際效用曲線斜率取決於 y 商品的兩項邊際效用的變化方向 $\varphi_{yy} \gtreqless 0$ 與 $\varphi_{yx} \gtreqless 0$。$\varphi_{yy} \gtreqless 0$ 的正、零、或是負，分別描述 y 商品的邊際效用是遞增、不變、或是遞減的情況。$\varphi_{yx} \gtreqless 0$ 的正、零、或是負，分別刻劃 x 商品是 y 商品的互補品、獨立品、或是替代品的情境。

第一，等邊際效用曲線的斜率，y 商品的邊際效用遞減 $\varphi_{yy}<0$ 之下，變成：

(31) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_{yx}}{\varphi_{yy}}\gtrless 0;\ \varphi_{yx}\gtrless 0 \text{ 且 } \varphi_{yy}<0$$

假設 y 商品的邊際效用遞減 $\varphi_{yy}<0$ 之下，互補品、替代品、獨立品的等邊際效用曲線所對應的斜率分別是：

(32a) $\varphi_{yx}>0 \Leftrightarrow x$ 商品是 y 商品的互補品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率為正

(32b) $\varphi_{yx}<0 \Leftrightarrow x$ 商品是 y 商品的替代品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率為負

(32c) $\varphi_{yx}=0 \Leftrightarrow x$ 商品是 y 商品的獨立品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率為零(水平線)

第二，等邊際效用曲線的斜率，y 商品的邊際效用遞增 $\varphi_{yy}>0$ 之下，變成：

(33) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_{yx}}{\varphi_{yy}}\gtrless 0;\ \varphi_{yx}\lessgtr 0 \text{ 且 } \varphi_{yy}>0$$

假設 y 商品的邊際效用遞增 $\varphi_{yy}>0$ 之下，互補品、替代品、獨立品的等邊際效用曲線所對應的斜率分別是：

(34a) $\varphi_{yx}>0 \Leftrightarrow x$ 商品是 y 商品的互補品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率為負

(34b) $\varphi_{yx}<0 \Leftrightarrow x$ 商品是 y 商品的替代品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率為正

(34c) $\varphi_{yx}=0 \Leftrightarrow x$ 商品是 y 商品的獨立品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率為零(水平線)

第三，等邊際效用曲線的斜率，y 商品的邊際效用不變 $\varphi_{yy}=0$ 之下，變成：

(35) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_{yx}}{\varphi_{yy}}=\pm\infty;\ \varphi_{yx}>0 \text{ 或 } \varphi_{yx}<0 \text{ 且 } \varphi_{yy}=0$$

假設 y 商品的邊際效用不變 $\varphi_{yy}=0$ 之下，互補品、替代品、獨立品的等邊際效用曲線所對應的斜率分別是：

(36a) $\varphi_{yx} > 0 \Leftrightarrow x$ 商品是 y 商品的互補品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率為垂直(無窮大)

(36b) $\varphi_{yx} < 0 \Leftrightarrow x$ 商品是 y 商品的替代品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率為無窮大(垂直)

(36c) $\varphi_{yx} = 0 \Leftrightarrow x$ 商品是 y 商品的獨立品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線為整個平面

最後，我們現在來分析 y 商品的序數邊際效用先遞增再遞減的統合情況。此時，y 商品的等邊際效用曲線的斜率此時呈現：

(37a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\varphi_{yx}}{\varphi_{yy}} \gtrless 0$ 先為負再為正；若 $\varphi_{yx} > 0$ 互補品且 φ_y 先遞增再遞減

(37b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\varphi_{yx}}{\varphi_{yy}} \gtrless 0$ 先為正再為負；若 $\varphi_{yx} < 0$ 替代品且 φ_y 先遞增再遞減

(37c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\varphi_{yx}}{\varphi_{yy}} = 0$ 始終為零(水平線)；若 $\varphi_{yx} = 0$ 獨立品且 φ_y 先遞增再遞減

對應地，互補品與替代品的等邊際效用曲線所對應的斜率：

(38a) $\varphi_{yx} > 0 \Leftrightarrow x$ 是 y 商品的互補品

$\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率隨著 y 增加先為負再轉為正的面向 y 軸的倒 U 型曲線

(38b) $\varphi_{yx} < 0 \Leftrightarrow x$ 是 y 商品的替代品

$\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率隨著 y 增加先為正再轉為負的面向 y 軸的 U 曲線

(38c) $\varphi_{xy} = 0 \Leftrightarrow x$ 是 y 商品的獨立品 $\Leftrightarrow$ 等邊際效用曲線斜率為水平線

若 y 商品的邊際效用先遞增後遞減，y 商品等邊際效用曲線的群組圖形，由上述的分析可以統合成如下的圖形。

在〔圖 27〕中，於兩種商品 (x, y) 平面上，所繪製的斜率先為負再轉為正的面向 y

軸的 U 型的等邊際效用線$\varphi_y(y;x)=c$，這表示在 y 商品的邊際效用先遞增$\varphi_{yy}>0$再遞減$\varphi_{yy}<0$，且 x 商品是 y 商品消費上的互補品$\varphi_{yx}>0$的圖形。

進一步地，〔圖 28〕表示，斜率先為負再轉為正的面向 y 軸的 U 型的等邊際效用線，因 x 商品是 y 商品消費上的互補品$\varphi_{yx}>0$，這表示 x 商品的數量愈多，倒 U 型的等邊際效用線的邊際效用水準愈高，因此愈往右方的 y 商品等邊際效用線的邊際效用水準愈高。

依此類推，在〔圖 29〕中，於兩種商品(x,y)平面上，所繪製的斜率先為正再轉為負的面向 y 軸的倒 U 型的等邊際效用線$\varphi_y(y;x)=c$，這表示在 y 商品的邊際效用先遞增$\varphi_{yy}>0$再遞減$\varphi_{yy}<0$，且 x 商品是 y 商品的替代品$\varphi_{yx}<0$的圖形。

進一步地，〔圖 30〕表示，斜率先為正再轉為負的面向 y 軸的 U 型的等邊際效用線，因為 x 商品是 y 商品的替代品$\varphi_{yx}<0$，這表示 x 商品的數量愈多，U 型曲線的等邊際效用線的邊際效用水準愈低，因此愈往左方 y 商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高。

再進一步類推，在〔圖 31〕中，於兩種商品(x,y)平面上，所繪製水平的等邊際效用線$\varphi_y(y;x)=c$，就表示 y 商品的邊際效用先遞增$\varphi_{yy}>0$再遞減$\varphi_{yy}<0$，且 x 商品是 y 商品消費上的獨立品$\varphi_{yx}=0$的圖形。

進一步地，〔圖 32〕表示，因為當 y 商品的邊際效用先遞增$\varphi_{yy}>0$時，這表示 y 商品的數量愈多，水平線的 y 商品的邊際效用愈高，因此愈往上方的 y 商品的等邊際效用線的邊際效用水準愈高。但 y 商品的邊際效用在跨過邊際效用為零$\varphi_{yy}=0$所對應的數量時，y 商品的邊際效用轉為遞減$\varphi_{yy}<0$，所以跨過此點之後， y 商品的數量愈多，水平線的 y 商品的邊際效用線的邊際效用水準愈低，因此 y 商品的邊際效用線的邊際效用水準愈往上方愈低。整理上述結果，這等於是說，y 商品的邊際效用線所對應的邊際效用水準在其邊際效用為零$\varphi_{yy}=0$的數量時達到最大，往上下兩邊調整時水平線背後的邊際效用水準都會下降。

12. 兩種商品的替代與互補的關係

比較 x 商品和 y 商品的等邊際效用曲線的斜率是：

(39) $$-\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}} \gtreqless -\frac{\varphi_{yx}}{\varphi_{yy}}$$

由於 x 商品的等邊際效用曲線斜率取決於 x 商品的兩項邊際效用的變化方向 $\phi_{xx} \gtreqless 0$ 與 $\phi_{xy} \gtreqless 0$，並且 y 商品的等邊際效用曲線斜率取決於 y 商品的兩項邊際效用的變化方向 $\varphi_{yy} \gtreqless 0$ 與 $\varphi_{yx} \gtreqless 0$，因此 x 商品和 y 商品的等邊際效用曲線的斜率並沒有存在任何必然關係。

在此，我想強調的是在新的跨界的得與失的序數邊際效用分析法中，以下幾項關係是可能或很可能出現的。其中，第一項特色是：

(40) $$\phi \neq \varphi$$

這表示 x 商品和 y 商品的邊際效用函數所歸屬或採用的變數符號是不一樣的，因為在新理論中，我們允許人們對兩個不同的選項是來自還沒有統合在一起的價值觀。x 商品是來自由以 ϕ 的邊際效用函數所刻劃的偏好或價值觀，而 y 商品是來自由以 φ 的邊際效用函數所刻劃的偏好或價值觀。這項特質與序數總效用理論是很不一樣的，在 Slutsky-Hicks 的現代理論中，不同選項的價值觀通常已經被統合在同一個總效用函數的單一價值觀之下，所以兩種 x 商品和 y 商品的邊際效用函數所歸屬或採用的變數符號是是一樣的。

第二項特徵是：

(41) $$\phi_{xy} \neq \varphi_{yx}$$

這表示 x 商品和 y 商品的交叉等邊際效用項不具對稱性。這項特質與序數總效用理論是很不一樣的，在 Slutsky-Hicks 的現代理論中，兩種商品的總效用的二次交叉微分項是會完全一樣的。

第三項特點是：

(42) $$sign\phi_{xy} \neq sign\varphi_{yx}$$

這表示 x 商品和 y 商品之間的互補性與替代性關係，並不具對稱性。也就是，x 商品是 y 商品的替代品，而 y 商品可以是 x 商品的互補品；或者，x 商品是 y 商品的互補品，而 y 商品可以是 x 商品的替代品。這項不對稱性的特質與古典的總效用理論也是很不一樣的，在古典的總效用理論中，x 商品和 y 商品之間的互補性與替代性是具有對稱性的。若 x 商品是 y 商品的替代品，則 y 商品必定是 x 商品的替代品；並且，若 x 商品是 y 商品的互補品，則 y 商品必定是 x 商品的互補品。

第四項關係，則是：

(43) $$sign(-\frac{\phi_{xx}}{\phi_{xy}}) \neq sign(-\frac{\varphi_{yx}}{\varphi_{yy}})$$

也就是，x 商品與 y 商品的等邊際效用線的斜率不見得會相等，所以兩條曲線也就不見得會重合了。

13. 我們猜對了嗎？

此文開始的時候，我們依據過去的經驗，對互補性圖形應該呈現一套的完整面貌或基本要求，提出以下的猜想：

第一，如果固定的負斜率直線表示兩種商品是完全替代品，在其他情況不變下，固定的正斜率直線應表示兩種商品是完全互補品。

第二，如果負斜率曲線表示兩種商品是替代品，在其他情況不變下，正斜率直線應表示兩種商品是互補品。

第三，如果負斜率曲線表示兩種商品是替代品，在其他情況不變下，相對斜率不同的負斜率曲線背後表示兩種商品各自的相對替代性程度不同。

第四，如果正斜率曲線表示兩種商品是互補品，在其他情況不變下，相對斜率不同的正斜率曲線背後表示兩種商品各自的相對互補性程度不同。

第五，如果垂直直線表示兩種商品呈現獨立品的關係，在其他情況不變下，水平直線表示兩種商品也呈現獨立品的關係，只是主客易位而已。

以上這些猜測，是一種先驗的或事先的理論猜測。我們分析的結果顯示，有一些我們猜對了，但有一些我們猜錯了。

我們建立在等邊際效用曲線的分析結果，顯示相當豐富或多樣的替代互補圖示，其中：

第一，如果負斜率曲線表示兩種商品是替代品，在其他情況不變下，正斜率直線應表示兩種商品是互補品。反之，對稱地，如果正斜率曲線表示兩種商品是替代品，在其他情況不變下，負斜率直線應表示兩種商品是互補品。

第二、如果負斜率曲線表示兩種商品是替代品，在其他情況不變下，相對斜率不同的負斜率曲線背後表示兩種商品各自的相對替代性程度不同。

第三，如果正斜率曲線表示兩種商品是互補品，在其他情況不變下，相對斜率不同的正斜率曲線背後表示兩種商品各自的相對互補性程度不同。

第四，如果垂直直線表示兩種商品呈現獨立品的關係，在其他情況不變下，水平直線表示兩種商品也呈現獨立品的關係，只是主客易位而已。

上述的分析結果，符合我們事先的猜測。我們親眼看到新的跨界得與失的序數邊際效用分析法的互補性概念能輕輕鬆鬆地禁得起這樣的嚴格考驗，這就是為什麼我們主張新的序數邊際效用分析法可以輕鬆取代「極大化預算限制下總效用的分析法」，並且教科書必須改寫的再一次的支持證據。

Reference

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(1)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(2)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色：難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(3)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(I)：效用極大化的 Marshall 模型與無意義的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(4)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(II)：Marshall 的「邊際需求價格」模型與古典效用可衡量概念的意義〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(5)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為 Marshall 需求理論編寫一冊返回經濟學舞台的劇本： 比較商品效用與價格效用的邊際摸索決策方式的 Marshall 模型〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(6)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法：完成序數效用革命理論的誕生〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(7)，研討論文。

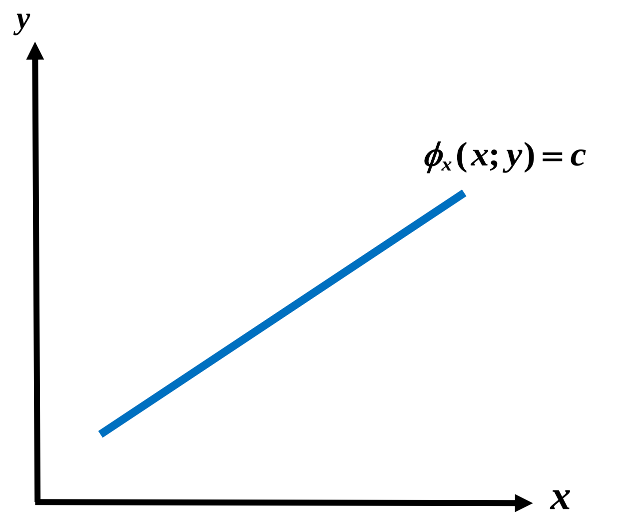
林忠正，(2015)，〈經濟學新的跨界十字交叉(A New Cross-Cross)圖形：取代無異曲線圖示的跨界序數邊際效用分析法的新圖示〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(8)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數效用革命的頭號戰犯：序數主義者眼中邏輯謬誤的常識性邊際效用互補性定義〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(9)，研討論文。

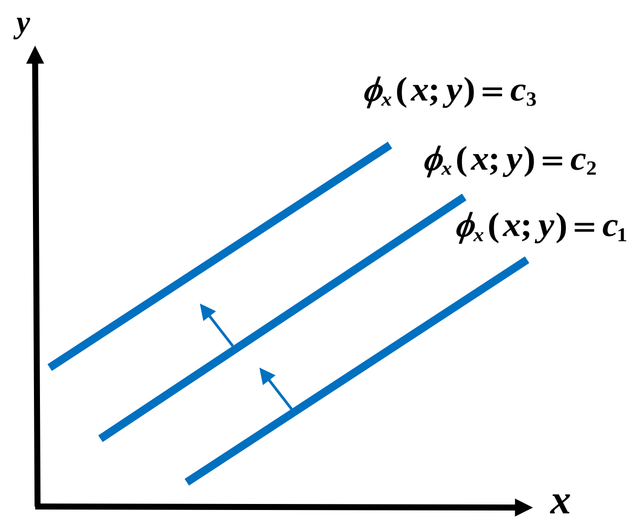
林忠正，(2015)，〈為什麼我們需要一個純正的立基心理法則的序數互補性理論？：難覓古典的 ALEP 互補性定義的完美分身〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(10)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」：在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(11)，研討論文。

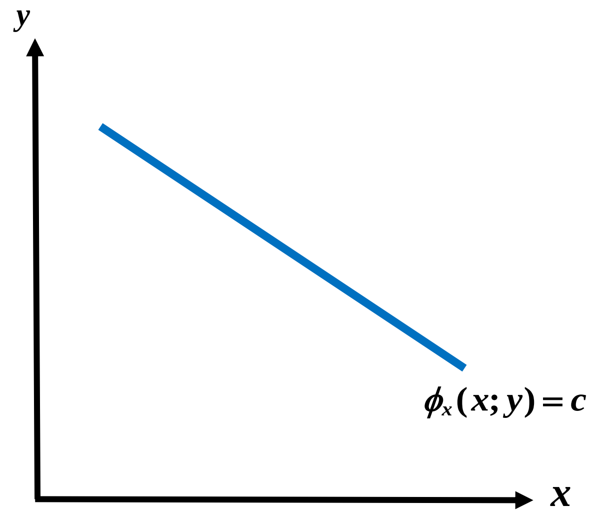
林忠正，(2015)，〈錯把馮京當馬涼：當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(12)，研討論文。



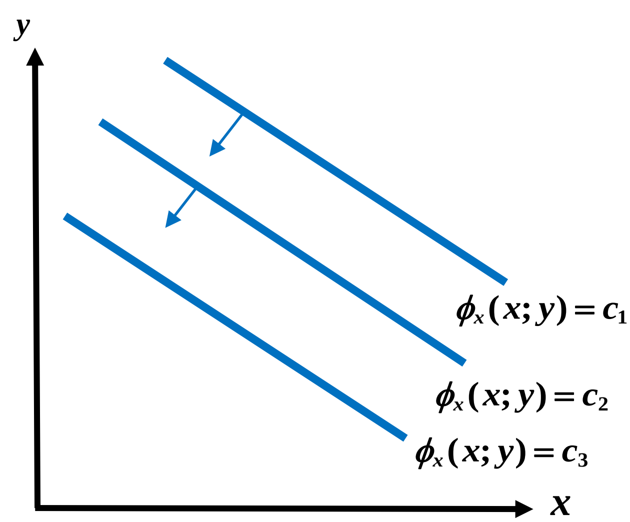
[圖 1]：$\phi_{xx}<0$，$\phi_{xy}>0$ (y 是 x 的互補品)
x 的等邊際效用曲線為正斜率



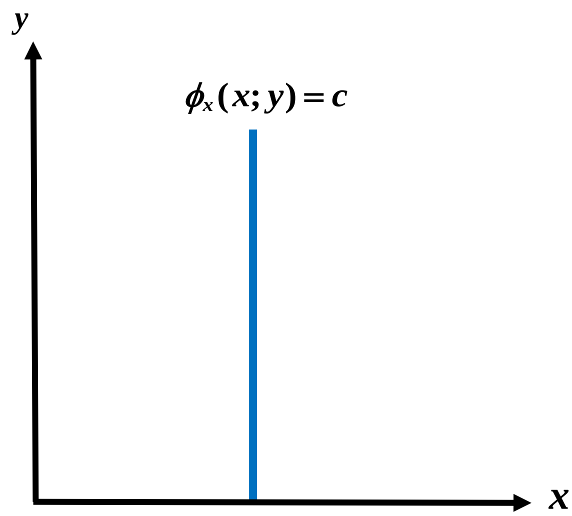
[圖 2]：$\phi_{xx}<0$，$\phi_{xy}>0$ (y 是 x 的互補品)
等邊際效用曲線，$c_1<c_2<c_3$



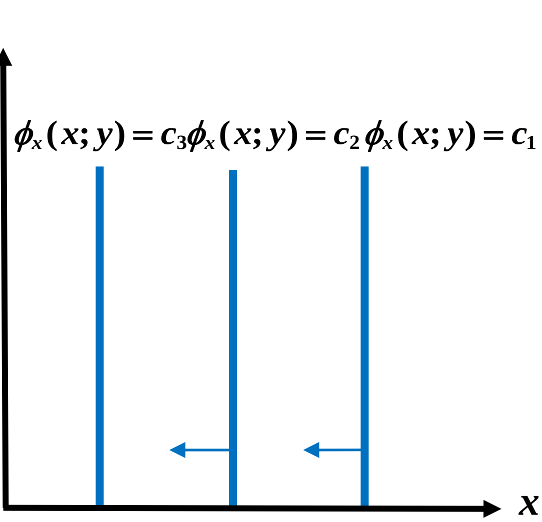
[圖 3]：$\phi_{xx}<0$，$\phi_{xy}<0$ (y 是 x 的替代品)
x 的等邊際效用曲線為負斜率



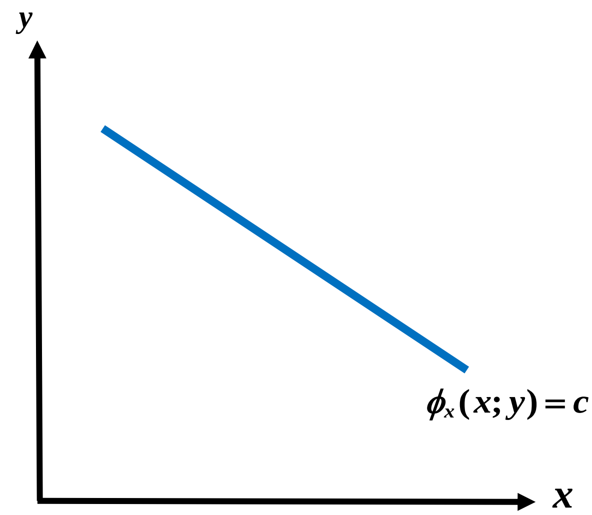
[圖 4]：$\phi_{xx}<0$，$\phi_{xy}<0$ (y 是 x 的替代品)
等邊際效用曲線，$c_1<c_2<c_3$



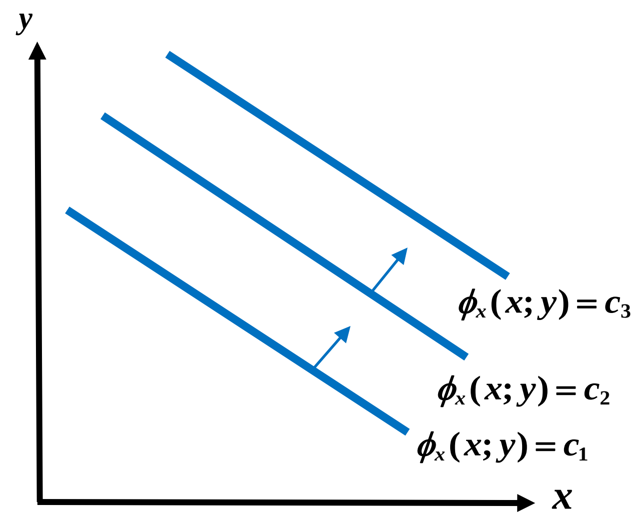
[圖 5]：$\phi_{xx}<0$ ，$\phi_{xy}=0$(y 是 x 的獨立品)
x 的等邊際效用曲線為垂直線



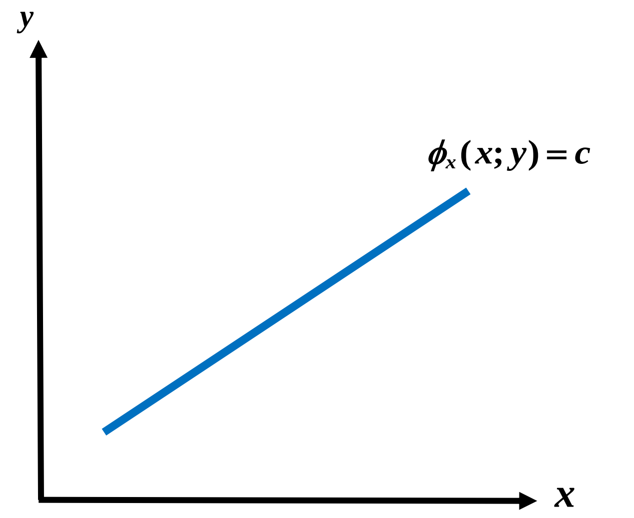
[圖 6]：$\phi_{xx}<0$ ，$\phi_{xy}=0$(y 是 x 的獨立品)
等邊際效用曲線，$c_1<c_2<c_3$



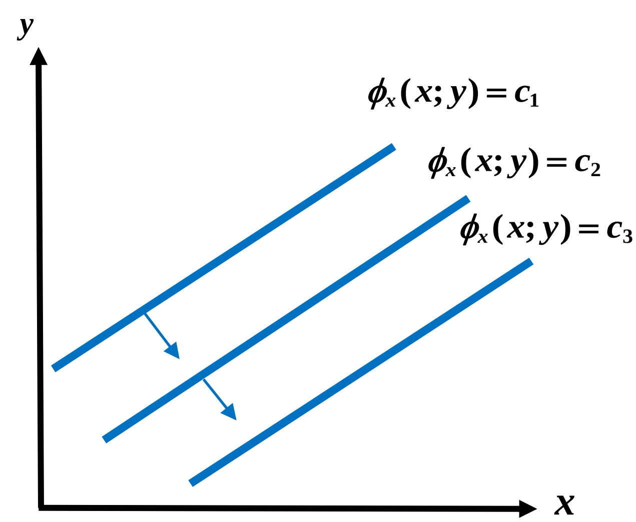
[圖 7]：$\phi_{xx}>0$，$\phi_{xy}>0$ (y 是 x 的互補品)
x 的等邊際效用曲線為負斜率



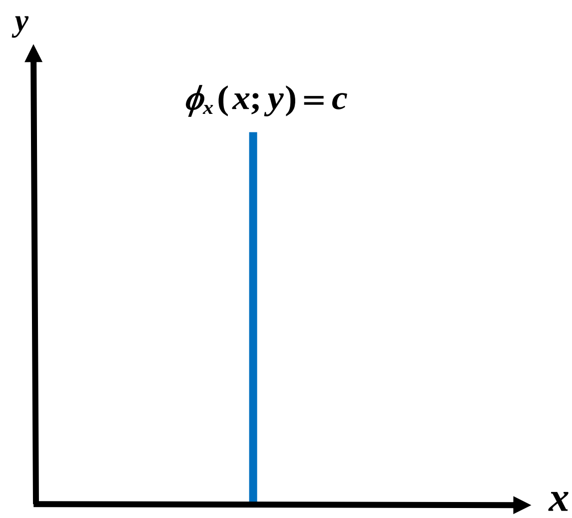
[圖 8]：$\phi_{xx}>0$，$\phi_{xy}>0$ (y 是 x 的互補品)
等邊際效用曲線，$c_1<c_2<c_3$



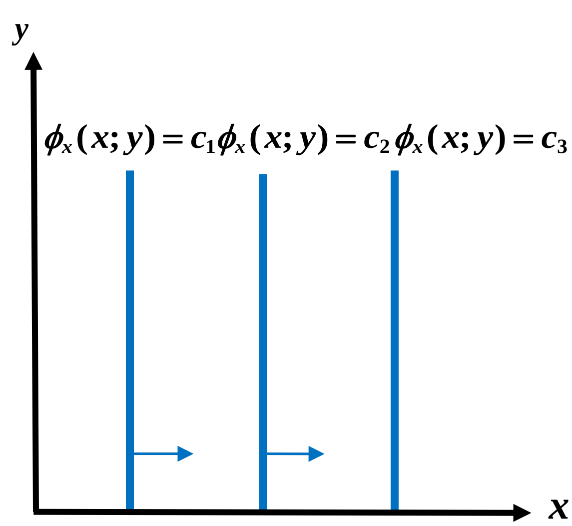
[圖 9]：$\phi_{xx}>0$，$\phi_{xy}<0$ (y 是 x 的替代品)
x 的等邊際效用曲線為正斜率



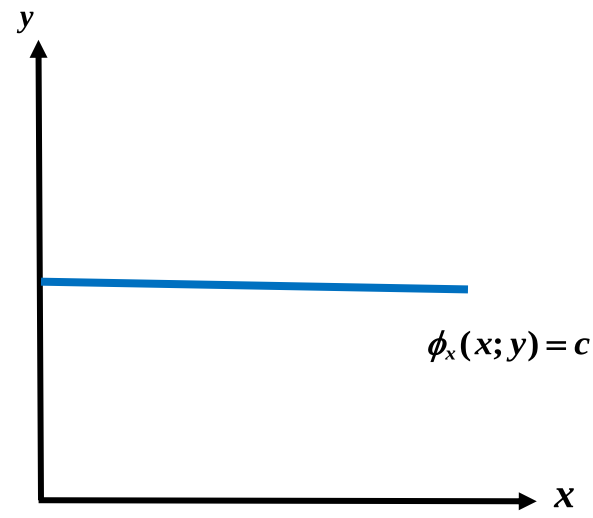
[圖 10]：$\phi_{xx}>0$，$\phi_{xy}<0$ (y 是 x 的替代品)
等邊際效用曲線，$c_1<c_2<c_3$



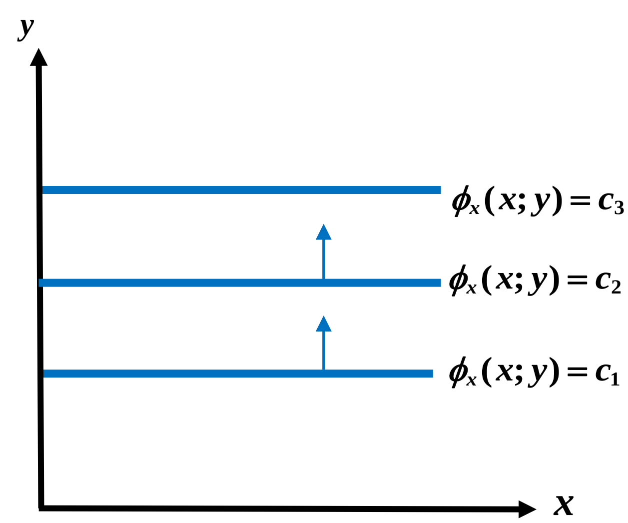
[圖 11]：$\phi_{xx}>0$ ，$\phi_{xy}=0$ (y 是 x 的獨立品)
x 的等邊際效用曲線為垂直線



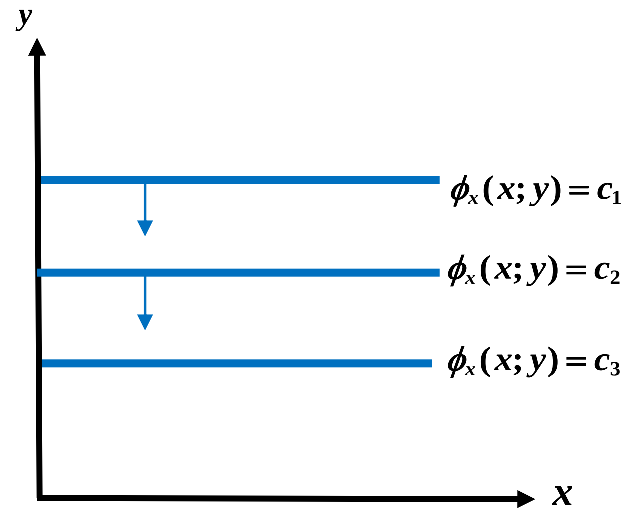
[圖 12]：$\phi_{xx}>0$ ，$\phi_{xy}=0$ (y 是 x 的獨立品)
等邊際效用曲線，$c_1<c_2<c_3$



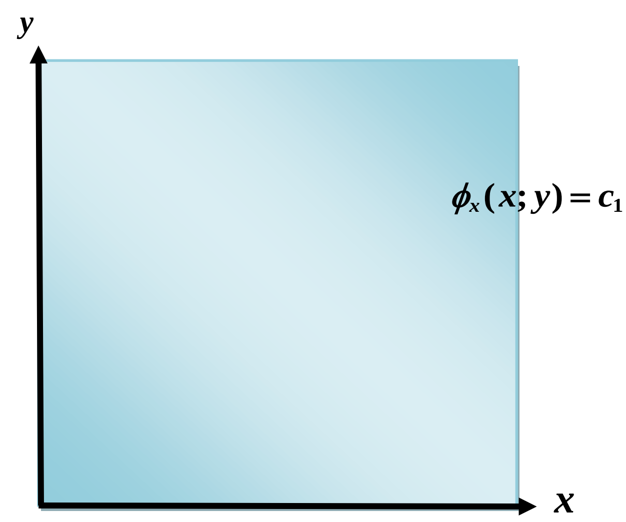
[圖 13]：$\phi_{xx}=0$，$\phi_{xy}>0$ (y 是 x 的互補品)
x 的等邊際效用曲線為水平線



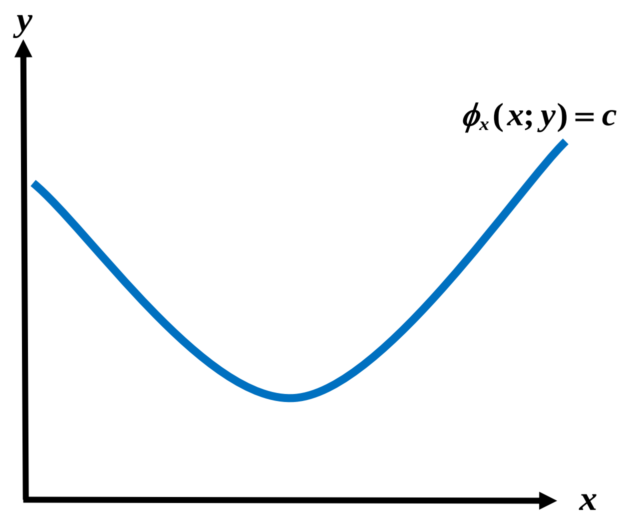
[圖 14]：$\phi_{xx}=0$，$\phi_{xy}>0$ (y 是 x 的互補品)
等邊際效用曲線，$c_1<c_2<c_3$



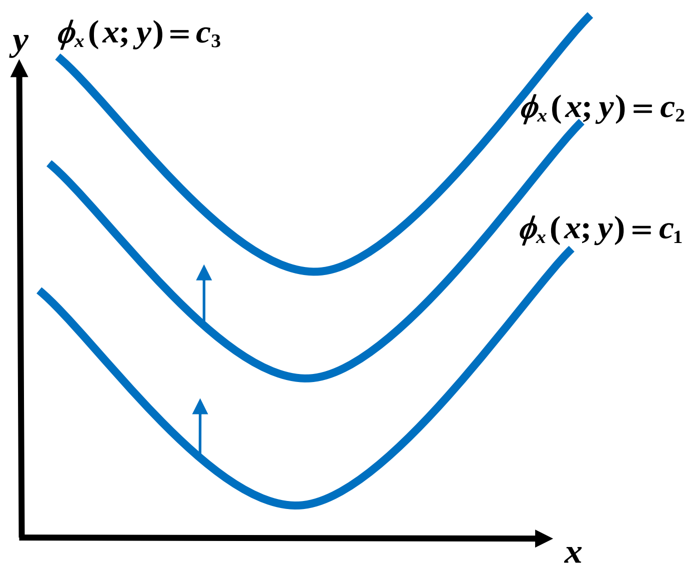
[圖 15]：$\phi_{xx}=0$，$\phi_{xy}<0$ (y 是 x 的替代品)
等邊際效用曲線，$c_1<c_2<c_3$



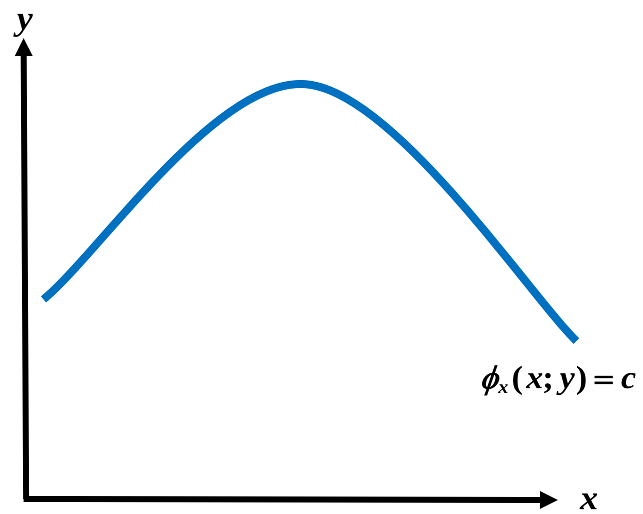
[圖 16]：$\phi_{xx}=0$，$\phi_{xy}=0$ (y 是 x 的獨立品)
等邊際效用曲面



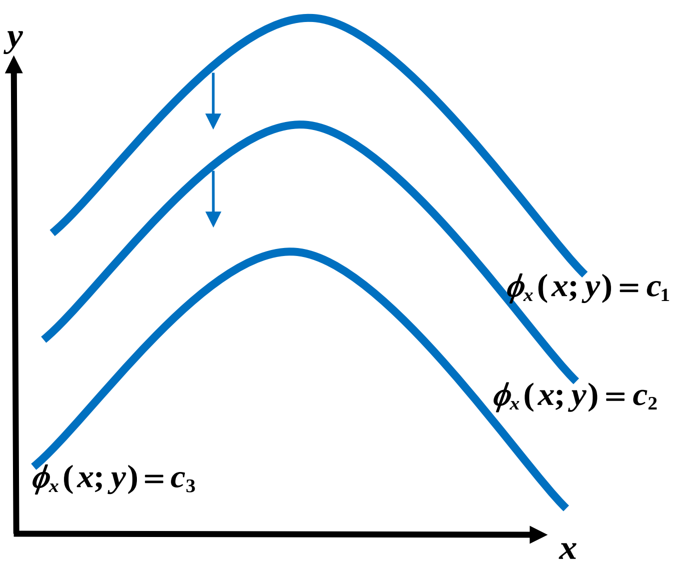
[圖 17]：ϕ_{xx} 先遞增後遞減，
$\phi_{xy}>0$(y 是 x 的互補品)，x 的等邊際曲線



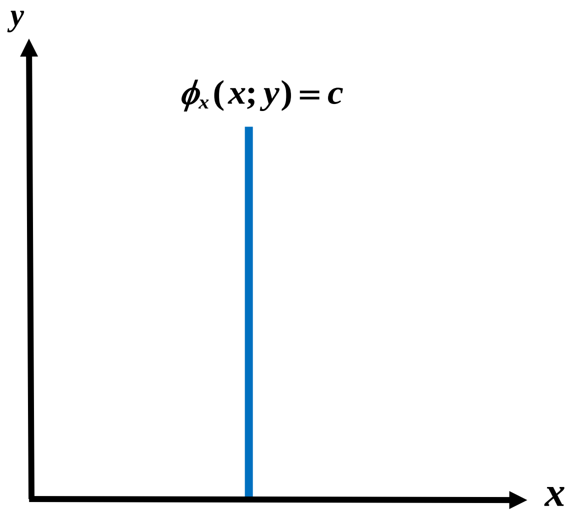
[圖 18]：ϕ_{xx} 先遞增後遞減，
$\phi_{xy}>0$(y 是 x 的互補品)，$c_1<c_2<c_3$



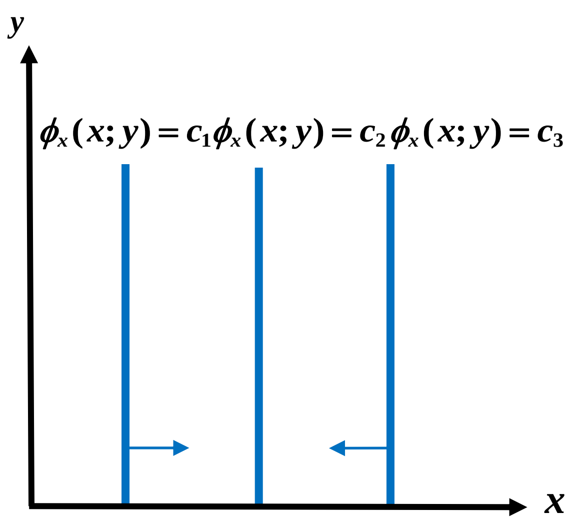
[圖 19]：ϕ_{xx}先遞增後遞減，
$\phi_{xy}<0$ (y 是 x 的替代品)，x 的等邊際曲線



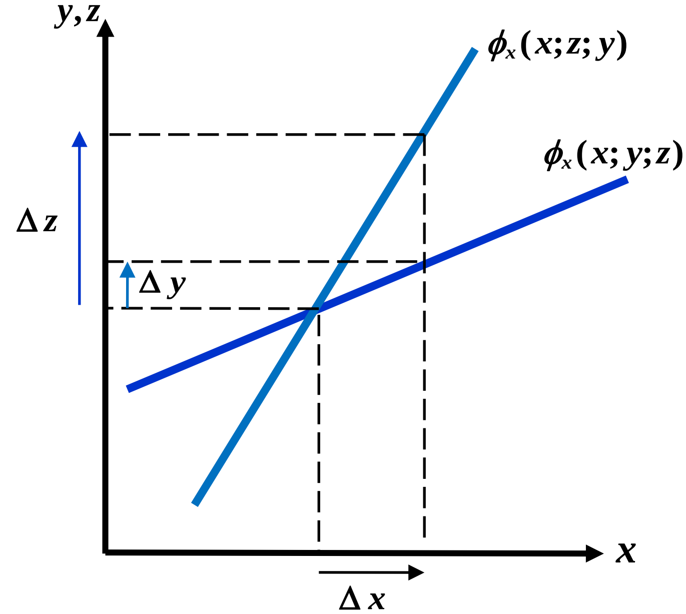
[圖 20]：ϕ_{xx}先遞增後遞減，
$\phi_{xy}<0$ (y 是 x 的替代品)，$c_1<c_2<c_3$



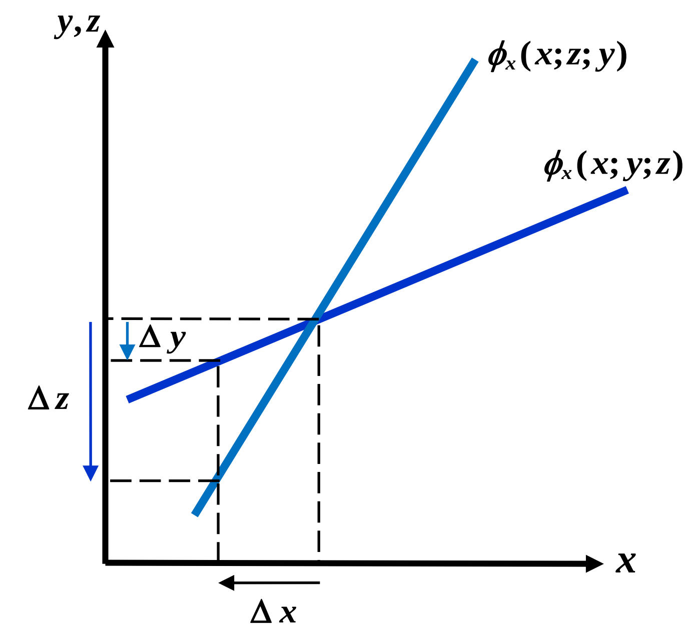
[圖 21]：ϕ_{xx} 先遞增後遞減，$\phi_{xy}=0$ (y 是 x 的獨立品)
x 的等邊際效用曲線為垂直線



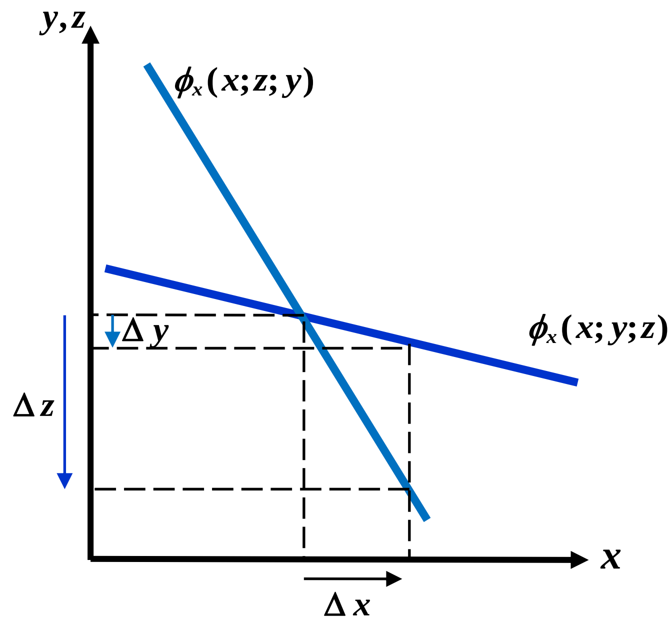
[圖 22]：ϕ_{xx} 先遞增後遞減，$\phi_{xy}=0$ (y 是 x 的獨立品)
等邊際效用曲線，$c_1 < c_2 > c_3$



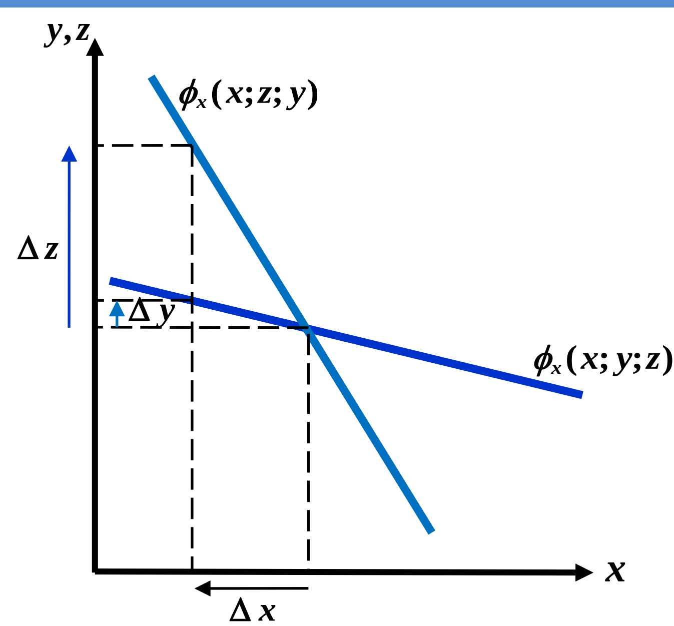
[圖 23] ：互補品：$\phi_x(x;z;y)$ 比 $\phi_x(x;y;z)$ 陡，$\Delta x\uparrow$



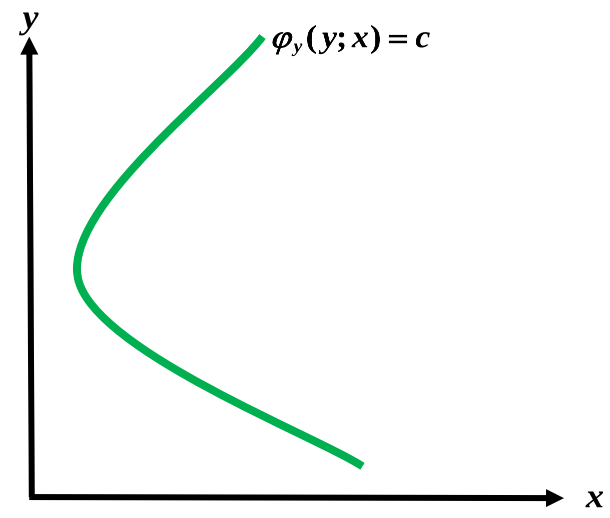
[圖 24] ：互補品：$\phi_x(x;z;y)$ 比 $\phi_x(x;y;z)$ 陡，$\Delta x\downarrow$



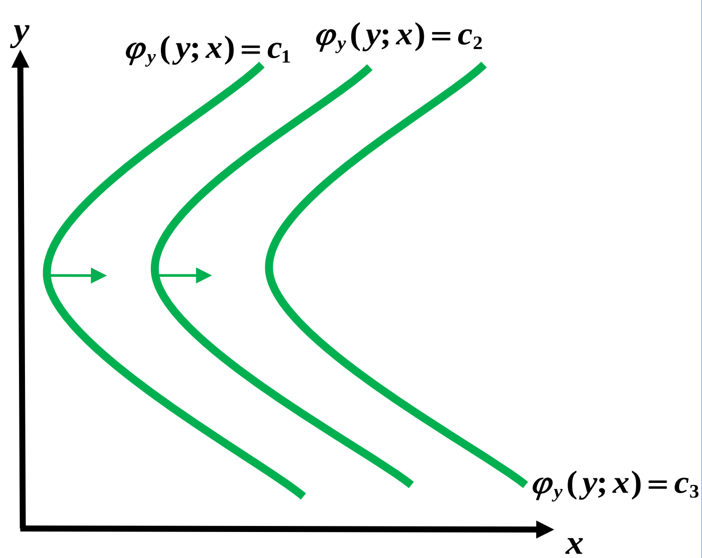
[圖 25] ：替代品：$\phi_x(x;z;y)$ 比 $\phi_x(x;y;z)$ 陡，$\Delta x \uparrow$



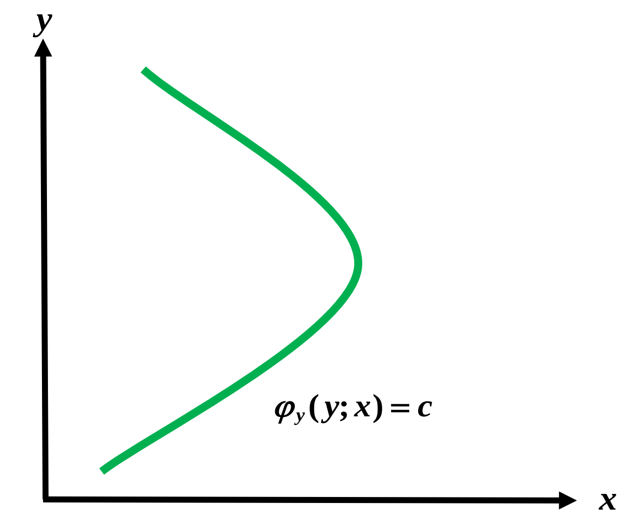
[圖 26] ：替代品：$\phi_x(x;z;y)$ 比 $\phi_x(x;y;z)$ 陡，$\Delta x \downarrow$



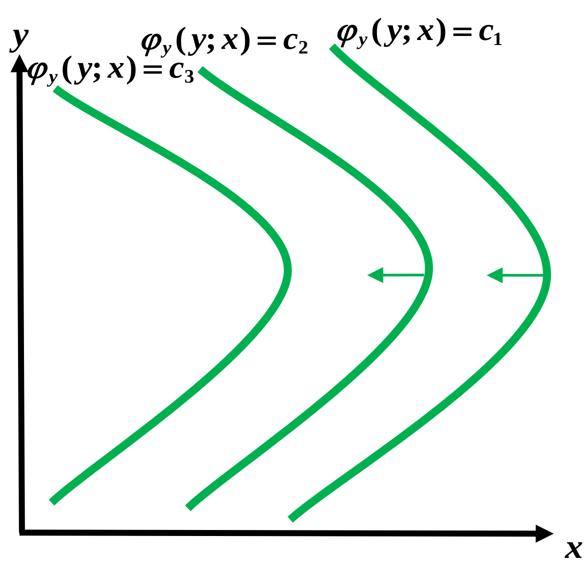
[圖 27]：φ_{yy} 先遞增後遞減，
$\varphi_{yx}>0$ (x 是 y 的互補品)，y 的等邊際效用曲線



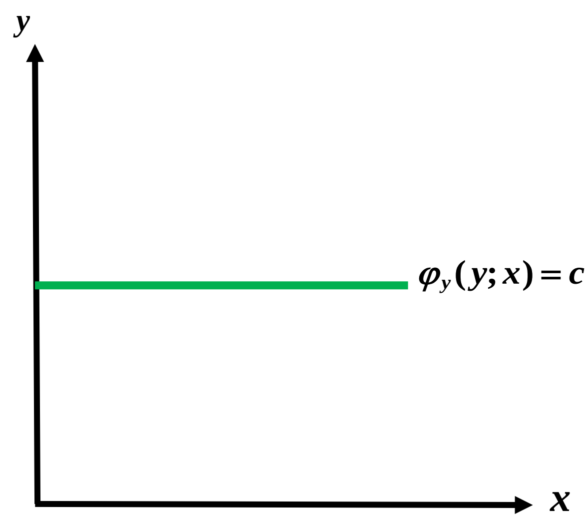
[圖 28]：φ_{yy} 先遞增後遞減，
$\varphi_{yx}>0$ (x 是 y 的互補品)，$c_1<c_2<c_3$



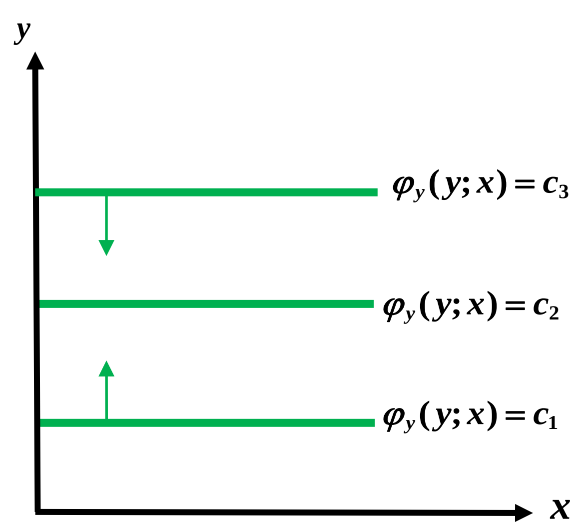
[圖 29]：φ_{yy} 先遞增後遞減，
$\varphi_{yx}<0$ (x 是 y 的替代品)，y 的等邊際效用曲線



[圖 30]：φ_{yy} 先遞增後遞減，
$\varphi_{yx}<0$ (x 是 y 的替代品)，$c_1<c_2<c_3$



[圖 31]：φ_{yy} 先遞增後遞減，$\varphi_{yx}=0$
(x 是 y 的獨立品) y 的等邊際效用曲線為水平線



[圖 32]：φ_{yy} 先遞增後遞減，$\varphi_{yx}=0$
(x 是 y 的獨立品)等邊際效用曲線，$c_1<c_2>c_3$