錯把馮京當馬涼

當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解

林忠正[*]
中央研究院經濟所研究員
國立政治大學財政系教授
國立交通大學經營管理研究所教授
台北市南港區(115-41)研究院路 2 段 128 號
中央研究院經濟所
電話: 886-2-2782-2791 轉 507
電子信箱: cclin@econ.sinica.edu.tw

開始撰稿-2015年11月20日
完稿時間-2015年12月31日
列印時間-2016年2月4日

[*]謝謝林曉珮助理非常有效率的協助，也很謝謝政大財政研究所江若妘同學的細心校稿。

錯把馮京當馬涼

當前完全互補品與完全替代品的定義與圖解

[摘要] 在現代個體經濟學的書籍中，於討論商品之間的互補性與替代性問題時，一開始就會畫出兩個大家非常熟悉的無異曲線圖來表示兩種最極端的商品關係。一是以負斜率的直線無異曲線表示完全替代的商品關係，二是以直角轉彎的無異曲線來描述完全互補的商品關係。這篇文章的目的在指出無異曲線斜率只是反映兩種商品邊際效用的正、負、或零的關係。邊際效用為正的商品是愈多愈好的「好東西」(goods)，邊際效用為負的商品是愈少愈好的「壞東西」(bads)，邊際效用為零的商品是數量多少無意義的「可有可無的東西」。因此「完全替代的負斜率直線的圖形與完全互補的直角的圖形」，其實，與兩商品之間在消費上的替代性與互補性毫無關聯。也就是，無異曲線的斜率與兩種商品之間的邊際效用交叉微分項的正負符號毫無關聯。事實上，在直角的完全互補與直線的完全替代之間的圖形的意義不見了，完全互補與完全替代之外的中間情況的圖形也不見了。這種怪異的真空狀態，提醒我們現代個體理論的互補性論述是不周全的，甚至，這提醒我們現代個體理論可能出了非常根本性的大瑕疵。現代個體理論連如此基本的替代與互補性關係都無法合理詮釋，甚至，可以說，這種詮釋方式是很荒誕的。這顯示現代由總效用出發的個體理論通不過正常的基本常識性門檻的考驗，應該把此理論丟進歷史的灰燼中，並尋找另一項新的合理理論來填補將其拋棄後所遺留的真空。

JEL 分類: B120, B130, B210, D010

關鍵詞：序數、基數、邊際效用、完全互補、完全替代

完全互補的圖形是直角轉彎的無異曲線，完全替代的圖形是直線的負斜率無異曲線圖。

這兩種圖形真的是刻劃商品完全替代與完全互補的合適圖形嗎？答案是：這是「錯把馮京當馬涼」的張冠李戴的概念。

那這兩種極端圖形之間的其他非極端圖形是代表甚麼意思呢？結果是：什麼也不是。

當了解這些事實後，還會再相信這種理論嗎？

老師還想在課堂上教這樣的理論嗎？

教科書撰寫者還想再撰寫這樣的教科書內容嗎？

這種種跡象都指向一項事實：由極大化總效用出發的現代經濟學理論是從第一個假設開始就出差錯的分析架構。

我們需要一套從第一個假設開始就不一樣的新經濟學新理論。

1. 錯把馮京當馬涼

在這篇文章中，我要指出一個可以類比一句中文諺語「錯把馮京當馬涼」的經濟學概念，這個經濟學觀念是你我非常熟悉的概念，但你可能從來沒有發現過其中的荒謬性。我要論述的是現代經濟理論中的「完全替代的負斜率直線無異曲線與完全互補的直角無異曲線」，我要說明這兩圖形其實與商品之間的消費上的替代與互補性毫無關係。

這其實是一個非常典型的「錯把馮京當馬涼」的「兩者乍看之下頗為相似而實際上大相逕庭」的傑出例子。

這或許有些人會嚇了一跳。但，更多人不會相信我上述的說法，甚至會對我的說法嗤之以鼻，並會毫不猶豫地立即提出很多理由嚴加駁斥我的論述。

但先不管這些，我們先簡單介紹「錯把馮京當馬涼」的意義。當然，我不是這方面的行家，本節的內容取自網路資料來說明這句成語的歷史典故。

首先，「馮京」是人名，也就是「錯把馮京當馬涼」這個成語故事中的故事主角。

當直寫「馮京」這兩個字時，如果將「馮」字左邊的兩點寫低一些，會導致將「馮京」改名為相似的「馬涼」的後果。因為,「馮」字被漏看了兩點，就變成「馬」字。並且，「京」字多了兩點，就接近「涼」字，據說古字「涼」字左邊的三點可以寫成兩點偏旁。所以，就會「錯把馮京作馬涼」了。

依據網路資料(正見網 2008 年 05 月 17 日)，進一步加以精簡之後,「錯把馮京作馬涼」的故事，可以這樣說：

> 北宋有一位大臣馮京（西元 1021—1094 年)，天生聰慧，長大參加科舉，鄉試、會試皆得第一。
>
> 馮京考試成績輝煌，又長得一表人才風度翩翩，國戚張堯佐想強納馮京為婿，以擴大他在朝廷的勢力。他利用權勢及金銀財富誘惑馮京答應這門親事，然而馮京不願，加以回絕。
>
> 張堯佐對此懷恨在心，欲在殿試時使馮京落榜。馮京有預感，故意在試卷上將其名「馮京」前面一字的兩點往後移到後一個字成為「馬涼」。
>
> 因為他的文章實在寫得很好，考官也不查「馬涼」其實是「馮京」，而推舉其為榜首。放榜時，張堯佐原以為馮京會落榜，卻發現事實不然。大怒，責備手下，這些人只好解釋說：這是因為「錯把馮京當馬涼」的緣故所造成的。
>
> 此句話後來成了諺語，比喻把兩個相似的東西混淆了，弄錯了，或者是有眼不識真相。

以上是比較正式的「錯把馮京當馬涼」的歷史故事，不知其正確性如何。另外，網路上也可以找到一些很簡單但有一些不一樣的解釋。例如：

> 一次鄉試，某主考官老眼昏花，把考生馮京的「馮」姓左邊兩點落到名字上了，他大喊「馬涼」，生員無一人回應。這便是「錯把馮京作馬涼」的笑話。後人屢引此事，來形容人昏庸不細察而大擺烏龍的情況。

現在則將「馮京當馬涼」解讀為「兩者乍看之下頗為相似而實際上大相逕庭」。也就是，把相似的事情弄錯了，張冠李戴，看錯或弄錯了對象的意思。

在介紹過「錯把馮京當馬涼」的可能歷史典故與意義之後，我們介紹經濟學教科書中，關於「完全替代的負斜率直線圖形與完全互補的直角圖形」的標準論述。

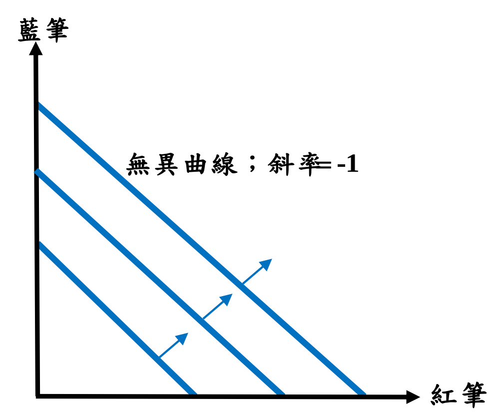
2. 教科書怎麼說

現在，看看教科書怎麼說。

我們以一本很有代表性的個體經濟學教科書 Varian (1996)的《中等個體經濟理論：一種現代分析方法》(*Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*)中的相關論述，展開相關討論。Varian (1996)如是說：

2.1 完全替代(Perfect Substitutes)

兩個商品是**完全替代品(perfect substitutes)**，如果消費者願意以一定比例方式以一種商品來替代(substitute)另一種商品(Two goods are **perfect substitutes** if the consumer is willing to substitute one good for the other at a *constant* rate.)。完全替代品最簡單的情況發生於當消費者願意以一比一的基礎在商品間互相替代(substitute)。



完全替代 消費者只關心筆的總數，不關心它們的顏色。因此無異曲線是有著斜率1 的直線。

假設，例如，我們正考慮在紅筆和藍筆之間進行選擇，消費者喜歡筆，但完全不在乎顏色。挑一個消費組合，例如(10, 10)，來進行討論。則對於此消費者而言，任何其他消費組合，只要有 20 枝筆，則和(10, 10)的商品組合一樣好。以數學方式來講，任何消費組合(x_1, x_2)使得

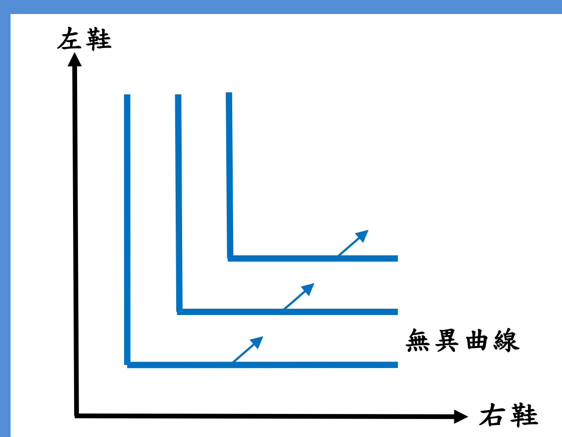
$x_1+x_2=20$，都會落在此消費者通過(10, 10)商品組合的無異曲線上。因此對於此消費者而言，無異曲線全部都是斜率為-1 的平行直線，如圖 3.3 所繪製的。具有筆的總數量更多的組合比具有筆的總數量更少的組合來得更受偏好，因此愈向上和向右的無異曲線愈受偏愛，如圖所呈現的。

…

2.2 完全互補(Perfect Complements)

完全互補品(**perfect complements**)為總是以固定比例一起消費的商品(**Perfect complements** are goods that are always consumed together in fixed proportions.)。以某種意義而言，商品之間彼此是互為互補品。一個很好的例子是右鞋和左鞋。消費者喜歡鞋子，但總是右鞋和左鞋一起穿。只有一雙鞋子中的一隻對於消費者而言並不會帶來什麼好處。

讓我們畫完全互補品的無異曲線。假設我們藉由挑選(10, 10)的消費組合開始進行分析。現在增加 1 隻右鞋，而有(11, 10)。依假設，此新組合對於消費者來說無異於原先組合：多一隻鞋子不會對他帶來什麼好處(the extra shoe doesn't do him any good. **譯者：但不會帶來壞處嗎？**)。相同地，如果我們增加一隻左鞋，消費者對於(10, 11)和(10, 10)是無差異的。



完全互補 消費者總是想要以固定比例一起消費的商品。因此無異曲線是 L 型。

因此無異曲線是 L 型，在 L 的頂點之處，左鞋的數量等於

右鞋的數量，如圖 3.4。

同時增加左鞋和右鞋的數量將使得消費者移動至偏好更高的位置，所以愈向上方和右方的無異曲線愈受偏愛，如圖所示。

關於完全互補品的主要關鍵是消費者偏好以固定比例消費商品，此比例不必是一比一。「如果一個消費者總是在她的一杯茶裡使用兩湯匙的糖，**不會對任何其他東西使用糖，**則無異曲線將始終是 L 型。」(If a consumer always uses two teaspoons of sugar in her cup of tea, **and doesn't use sugar for anything else,** then the indifference curves will still be L-shaped.)在此情況下，L 的角落將發生在(2 湯匙的糖，1 杯茶)，(4 湯匙的糖，2 杯茶)等等，而不在(1 右鞋，1 左鞋)，(2 右鞋，2 左鞋)等等。

…

6.7 替代品和互補品(Substitutes and Complements)

我們已經使用替代品和互補品的術語，現在已經是給予一個正式定義的適當時機了。既然我們已經提到了***完全***替代品和***完全***互補品好幾次，因此現在去討論不完全的情況似乎是一件很合理的事。

讓我們首先想想替代品的案例。我們說，紅色鉛筆和藍色鉛筆可能會被認為是完全的替代品，至少對於不關心顏色的人這是對的。但鉛筆和鋼筆呢？這是「不完全」(imperfect)的替代品的情況。也就是說，鋼筆和鉛筆是，在一定程度上彼此代替，雖然它們不像紅色鉛筆和藍色鉛筆一樣彼此互為完全替代品。

同樣地，我們說，右腳鞋子和左腳鞋子是完全互補品。但對於一雙鞋子和一雙襪子呢？右鞋和左鞋幾乎總是(always)一起消費，而鞋和襪子***通常***(*usually*)一起消費。互補品是指那些像鞋子和襪子的物品，往往要一起消費，儘管並非總是如此。

現在，我們已經討論過互補品和替代品的基本思想了，我們可以給出一個精確的經濟學定義了。回想一下，商品 1 的需求函數通常是商品 1 和商品 2 價格的函數，所以我們可以寫成 $x_1(p_1, p_2, m)$。我們可以問，當商品 2 的價格變化時，商品 1 的需求如何變化，它會增加還是會減少？

如果，當商品 2 的價格上升時，商品 1 的需求上升，那麼我們說商品 1 是商品 2 的一個替代品。以變化率而言，商品 1 可以取代商品 2，如果

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_2} > 0$$

我們的想法是，當商品 2 變得更昂貴時，消費者切換到消費商品 1，消費者遠離更昂貴的商品而以相對較不昂貴的商品來*替代*。

另一方面，當商品 2 的價格增加時，商品 1 的需求減少，我們說商品 1 是商品 2 的互補品。這表示為

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_2} < 0$$

互補品是一起消費的商品，例如咖啡和糖，當其中一個商品的價格增加時，兩個商品的消費量都將會趨於減少。

完全替代品和完全互補品的情況可以很好地展現這些要點。在完全替代品的情況下，$\Delta x_1/\Delta p_2$ 是正的（或是零），以及在完全互補的情況下，$\Delta x_1/\Delta p_2$ 是負的。

針對這些概念的一些警告依序說明如下。第一，當涉及到互補和替代的問題時，兩個商品的情況是相當特殊的。由於預算被固定住，如果你花更多的錢在商品 1 上，你將不得不減少花在商品 2 上的錢。這對消費者可能選擇的行為產生一些限制。當有兩個以上的商品，這些限制的問題就不大了。

第二，儘管以消費者需求的行為來定義替代品和互補品似

乎是合理的，但在更一般的環境中還是會產生一些定義上的困難。舉例來說，如果我們使用上述定義於涉及兩個以上的商品的情況下，出現以下的狀況是完全可能的，商品 1 可以是商品 3 的替代品，但商品 3 可能是商品 1 的互補品。因為這個特殊的特色，更先進的處理通常採用有些不同的替代品和互補品定義。上面給出的定義描述稱為**毛替代品(gross substitutes)**和**毛互補品(gross complements)**的概念；他們將足以滿足我們這本書的需求。

3. 神秘消失於直角的完全互補與直線的完全替代之間的圖形

從而，藉由上述典型的現代個體經濟學書籍關於互補性與替代性問題的討論，我們了解作者們通常於一開始的敘述中，就會畫出兩個大家非常熟悉的無異曲線圖來表示兩種最極端的商品關係。一是以負斜率的直線無異曲線表示完全替代的商品關係，二是以直角轉彎的無異曲線來描述完全互補的商品關係。

接著，直角的完全互補與直線的完全替代之間的非極端狀態的圖形都神秘失蹤了。並且，很奇怪地，突然之間轉向，不以消費者的心理效用的觀點繼續進行分析，卻改以一種商品價格變化對另一種商品需求數量的影響方向來定義替代互補品。

這也是 Samuelson (1974)會評論說，這種定義是連經濟學的博士生都會喊救命的原因：

> 如果我們想要描述這種新的程序給維根斯坦所教的奧地利學生，他們會驚訝地得知，這種屬於他們的後 Pareto 概念所論述的竟然是這麼一回事。經濟博士生可能流露出同樣的驚愕表情。「什麼？」他們會問，「想要去發現茶和檸檬是互補品，我必須追蹤它們的價格或數量的變化而在貨幣所得或其他一個或一些商品的『補償性』變化？上帝保佑我的靈魂，我從來沒有懷疑過。請問，這是為什麼呢？」[1]

其實，如果你偷聽研究生教室或偷窺中級和高級經濟理論的書籍，你必定在學習為什麼會採取如此的定義方式的原因時遭遇到一些困

[1] The same astonishment might be registered by most in-laws of economic Ph.D.'s. “What?” they will ask, “to discover that tea and lemon are complements must I accompany any change in their prices or quantities by a ‘compensating’ change in money income or in some other good or goods? Bless my soul, I'd never have suspected that. Pray, why?”

難。

無論如何，現代很多個體經濟學家都這樣教學生，這也是現代很多相關的經濟學教科書所涵蓋的標準內容。

如果固定的負斜率的無異曲線表示兩商品是完全替代品，那很正常地，我們應該可以主張，負斜率的無異曲線應該表示兩商品是替代品。而固定的正斜率的無異曲線表示兩商品是完全互補品，且正斜率的無異曲線應該表示兩商品是互補品，並且水平與垂直的無異曲線應該表示其中一個商品是另一商品消費上的獨立性商品。

依據上述完全替代品的定義，我們可容易類推出一些相關性質。也就是，我們應該會推出以下的關係：

(1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{U_x}{U_y}<0 \Leftrightarrow$ 無異曲線斜率為負 $\Leftrightarrow$ 商品 x 與商品 y 互為替代品

(2) $\frac{dy}{dx}=-\frac{U_x}{U_y}>0 \Leftrightarrow$ 無異曲線斜率為正 $\Leftrightarrow$ 商品 x 與商品 y 互為互補品

(3) $\frac{dy}{dx}=-\frac{U_x}{U_y}=0 \Leftrightarrow$ 無異曲線斜率為零 $\Leftrightarrow$ 商品 x 與商品 y 互為獨立品

(4) $\frac{dy}{dx}=-\frac{U_x}{U_y}=\pm\infty \Leftrightarrow$ 無異曲線斜率為無窮大 $\Leftrightarrow$ 商品 x 與商品 y 互為獨立品

但是，我們從來沒有看過也沒有聽過這種說法，也沒有教科書這樣寫。想一想，這現象是不是怪怪的。

為何直角的完全互補圖形和負斜率直線的完全替代圖形之間的圖形都神秘消失了？一個完整的互補性與替代性概念與論述，應該要有完整的配套的圖形作為搭配才對。

這塊失落的拼圖，提醒我們這不是一個理想的論述，魔鬼藏在細節裡，這值得我們仔細想一想，這樣的圖形真的傳達了它被賦予的「完全替代品與完全互補品」的意義嗎？

我們先討論負斜率直線無異曲線的「完全替代品」概念的正確意義，然後再說明直角轉彎的無異曲線的「完全互補品」概念的妥當意義。

4. 直線負斜率的完全替代品是替代品嗎？

直線負斜率的完全替代品是替代品，這表示「完全替代品是替代品」的定義有兩層意義，一是無異曲線的斜率為負(向下傾斜的線)，二是無異曲線的斜率是固定(直線)。

有這樣性質的無異曲線真的是具有我們所謂的消費上的完全替代的性質嗎？如紅筆與藍筆的比喻是適當的嗎？還是是一種錯把馮京當馬涼的誤導性的舉例與圖示呢？

4.1 無異曲線斜率的意義

接著，我們就先由數學來看，無異曲線的斜率的明確意義。

無異曲線或等總效用曲線的定義：

(5) $$U(x,y)=c;\ U_x \gtrless 0,\ U_y \gtrless 0,\ c\text{是常數}$$

也就是，等總效用曲線或無異曲線 $U(x,y)=c$ 的經濟意義，就是構成相同偏好或效用水準的各種不同商品組合 (x,y) 所連成的在 (x,y) 平面上的軌跡。

對等總效用曲線或無異曲線 $U(x,y)=c$ 進行全微分：

(6) $$U_x dx + U_y dy = dc = 0$$

等總效用曲線或無異曲線的斜率因此是：

(7) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} \gtrless 0$$

完全替代的等總效用曲線或無異曲線現在的定義的斜率

(8) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} = a < 0 \Leftrightarrow \text{無異曲線的斜率為固定負的常數}$$

現在我們可以開始檢討,「斜率為負值且斜率的數值為常數的等總效用曲線或無異曲線」，在數學上表示什麼意義。

4.2 負斜率無異曲線的意義

「斜率為負」的條件因此表示兩種商品的邊際效用的正負方向是同向的，即：

(9) $$signU_x = signU_y \neq 0$$

換句話說，「斜率為負」的條件有兩種可能性，兩種商品的邊際效用都是正的或兩種商品的邊際效用都是負的。即：

(10) $$signU_x = signU_y > 0$$

(11) $$signU_x = signU_y < 0$$

接著，我們要問的是邊際效用為正值是什麼意思？邊際效用為負值是什麼意思？

首先，邊際效用為正是什麼意思？就是商品的數量增加，該商品所帶來的總效用愈高的意思，也就是，這種商品對消費者而言是愈多愈好的商品，在經濟學上我們就稱這種商品是人們欲求的「好東西」，英文就叫「goods」。

其次，邊際效用為負是什麼意思？就是商品的數量增加，該商品所帶來的總效用愈低的意思，也就是，這種商品對消費者而言是愈多愈不好的商品，在經濟學上我們就稱這種商品是人們厭惡的「壞東西」，英文就叫「bads」。

因此，其他條件不變之下，將任何兩個「好東西」所構成的總效用函數畫在該兩種商品的平面上的無異曲線的斜率就是負斜率的線。並且，落在愈右上方的無異曲線所隱含的消費者滿足水準(總效用)愈高，如〔圖 1〕所示。到現在為止，我們看不出來這兩種「好東西」必須要存在任何消費上的替代或互補性關係，才能畫出負斜率的無異曲線。也就是，不論這兩種「好東西」為替代、互補或獨立關係，其無異曲線都是負斜率的曲線。換句話說，構成負斜率的無異曲線的兩種商品不應該直接被稱為替代品。

同理，其他條件不變之下，將任何兩個「壞東西」所構成的總效用函數畫在該兩種商品的平面上的無異曲線的斜率就是負斜率的線。並且，落在愈左下方的無異曲線所隱含的消費者滿足水準(總效用)愈高，如〔圖 2〕所示。到現在為止，我們也看不出來這兩種「壞東西」必須要存在任何消費上的替代或互補性關係，才能畫出負斜率的無異曲線。

也就是，不論這兩種「壞東西」為替代、互補或獨立關係，其無異曲線都是負斜率的曲線。換句話說，構成負斜率的無異曲線的兩種商品不應該直接被稱為替代品。

但若兩種商品不存在於總效用的角度上替代或互補關係的時候，若其中一項是 goods 而另一項是 bads，則我們可能不會稱它們是互補品，例如一項東西是食物數量，一項是發生在巴黎的壞消息的恐怖行動的嚴重程度，我們說它們是消費上的互補品，這將是很奇怪的概念。

4.3 負的固定斜率無異曲線的意義

接著，我們討論等總效用曲線或無異曲線的斜率為常數的意義。

無異曲線的斜率變化率的數學運算為：

(12)
$$\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{dMRS_{xy}}{dx}=-\frac{(U_{xx}+U_{xy}\frac{dy}{dx})U_y-(U_{yx}+U_{yy}\frac{dy}{dx})U_x}{U_yU_y}$$

$$=-\frac{(U_{xx}+U_{xy}(-\frac{U_x}{U_y}))U_y-(U_{yx}+U_{yy}(-\frac{U_x}{U_y}))U_x}{U_yU_y}$$

$$=-\frac{(U_{xx}U_y-U_{xy}U_x)U_y-(U_{yx}U_y-U_{yy}U_x)U_x}{U_yU_yU_y}$$

$$=-\frac{U_{xx}U_yU_y-U_{xy}U_xU_y-U_{yx}U_yU_x+U_{yy}U_xU_x}{U_yU_yU_y}$$

$$=-\frac{U_{xx}U_yU_y-2U_xU_yU_{xy}+U_{yy}U_xU_x}{U_yU_yU_y}$$

其中，無異曲線為負的直線，即其斜率為負的固定直時，隱含：

(13)
$$U_{xx}U_yU_y-2U_xU_yU_{xy}+U_{yy}U_xU_x=0$$

因此，無異曲線的斜率變化率取決於$U_x \gtreqless 0$、$U_y \gtreqless 0$、$U_{xx} \gtreqless 0$、$U_{yy} \gtreqless 0$、$U_{xy}=U_{yx} \gtreqless 0$等五個變數正負與數值。想要藉由五個數值可為正、可為負、可為零的變數，來構成無

異曲線斜率為負的常數的條件，其成立的可能組合方式有非常多種。因此，負的常數的無異曲線斜率，與邊際效用U_x、U_y，與邊際效用的變化率U_{xx}、U_{yy}、以及U_{xy}的正負之間，並沒有必然必須存在任何特定的關係。

特別值得強調地，無異曲線斜率為負的常數的圖形與刻劃古典經濟學家的互補性與替代性定義的交叉微分項U_{xy}正負符號，兩者之間並無任何必然關係存在。而U_{xy}的正負是反映消費者對兩種商品在消費上的替代性與互補性的直接心理評價。

4.4 其他斜率無異曲線的意義

前面的分析顯示，負斜率無異曲線只表示兩種商品都是邊際效用為正值的「好東西」，或是兩種商品都是邊際效用為負值的「壞東西」而已。我們看不出來任何兩種「好東西」必須要存在任何消費上的替代或互補性關係，也看不出來任何兩種「壞東西」必須要存在任何消費上的替代或互補性關係。也就是，無異曲線的斜率與兩種商品之間的邊際效用交叉微分項的正負符號毫無關聯。

接著，我們來看看其他斜率的無異曲線又代表什麼意義？

首先，正斜率的無異曲線是：

(13) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{U_x}{U_y}>0 \Leftrightarrow \text{無異曲線的斜率為正}$$

「斜率為正」的條件因此表示兩種商品的邊際效用的正負方向是反向的非零的數值，即：

(14) $$signU_x=-signU_y\neq 0$$

「斜率為正」的條件有兩種可能性：一種是商品x的邊際效用是正值搭配商品y的邊際效用是負值的情況；另一種是商品x的邊際效用是負值搭配商品y的邊際效用是正值的情況。

若商品x的邊際效用是正值，即：

(15) $$signU_x=-signU_y>0$$

前者表示商品x的邊際效用是正值是一種「好東西」，愈多愈好；而商品y的邊際效用是

負值是一種「壞東西」，愈多愈不好。其無異曲線如〔圖 3〕所示，愈往右邊表示總效用愈高的正斜率的無異曲線。

若商品 x 的邊際效用是負值，即：

(16) $$-signU_x = signU_y > 0$$

相反地，後者表示商品 y 的邊際效用是正值是一種「好東西」，愈多愈好；而商品 x 的邊際效用是負值是一種「壞東西」，愈多愈不好。其無異曲線如〔圖 4〕所示，愈往上方表示總效用愈高的正斜率的無異曲線。

其次，斜率為零的無異曲線是：

(17) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} = 0 \Leftrightarrow \text{無異曲線的斜率為零(水平線)}$$

「斜率為零」的條件因此表示商品 x 的邊際效用為零是一種「無所謂的東西」或「可有可無的東西」；而商品 y 的邊際效用是非零的數值，商品 y 可以是邊際效用為正值的「好東西」，或商品 y 可以是邊際效用為負值的「壞東西」。即：

(18) $$signU_x = 0 \text{ 且 } signU_y \neq 0$$

若商品 y 是邊際效用為正值的「好東西」，則：

(19) $$signU_x = 0 \text{ 且 } signU_y > 0$$

則其無異曲線如〔圖 5〕所示，愈往上方表示總效用愈高的水平的無異曲線。

反之，若商品 y 是邊際效用為負值的「壞東西」，則：

(20) $$signU_x = 0 \text{ 且 } signU_y < 0$$

則其無異曲線如〔圖 6〕所示，愈往下方表示總效用愈高的水平的無異曲線。

第三，斜率為無窮大的無異曲線是：

(21) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} = \pm\infty \Leftrightarrow \text{等總效用曲線或無異曲線為垂直線}$$

「斜率為無窮大」的條件因此表示商品 y 的邊際效用為零是一種「無所謂的東西」或「可有可無的東西」;而商品 x 的邊際效用是非零的數值,商品 x 可以是邊際效用為正值的「好東西」,或商品 x 可以是邊際效用為負值的「壞東西」。即:

(22) $signU_x \neq 0$ 且 $signU_y = 0$

若商品 x 是邊際效用為正值的「好東西」,則:

(23) $signU_x > 0$ 且 $signU_y = 0$

則其無異曲線如〔圖 7〕所示,愈往右邊表示總效用愈高的垂直的無異曲線。

反之,若商品 x 是邊際效用為負值的「壞東西」,則:

(24) $signU_x < 0$ 且 $signU_y = 0$

則其無異曲線如〔圖 8〕所示,愈往左邊表示總效用愈高的垂直的無異曲線。

歸納上述分析,本節的討論結果,可以羅列如下:

(25) $\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} < 0 \Leftrightarrow$ 無異曲線斜率為負 $\Leftrightarrow$ 商品 x 與商品 y 同時為「好東西」或「壞東西」

(26) $\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} > 0 \Leftrightarrow$ 無異曲線斜率為正 $\Leftrightarrow$ 商品 x 與商品 y 一是「好東西」一是「壞東西」

(27) $\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} = 0 \Leftrightarrow$ 無異曲線斜率為零 $\Leftrightarrow$ 商品 x 是中立品與商品 y 是「好東西」或「壞東西」

(28) $\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} = \pm\infty \Leftrightarrow$ 無異曲線斜率為無窮大 $\Leftrightarrow$ y 是中立品與 x 是「好東西」或「壞東西」

簡言之,無異曲線的斜率是反映兩種商品是「好東西」與「壞東西」的組合狀態,與兩種商品消費上的互相關聯性毫無關係,現在的負斜率的直線是完全替代與直角轉彎的圖形是完全互補性的講法,的確是一種錯把馮京當馬涼的「竹竿當作菜刀」的錯誤概念。並且,在式(1)-式(4)中,我們所做的事先猜測,現在證明是因為錯誤的前提(錯誤的當前理論)所導致的錯誤的猜測。

這世界對每一個人來說,商品的種類都可以分成三種,一種是邊際效用為正的「好東西」,一種是邊際效用為負的「壞東西」,一種是邊際效用為零的「可有可無的東西」

或為「無所謂的東西」或可以幽默地說「不是東西的東西」。我們把任何兩個東西放在一起討論或考慮，在其他條件維持不變之下，我們都可以畫出任何兩項商品的無異曲線，但非常清楚地，無異曲線的斜率就取決於兩種商品的邊際效用的正、負或零，與邊際效用的交叉項毫無關係，所以無異曲線的斜率並不能反映任何以心理考量為基礎的替代與互補性的定義精神。

4.5 補償與替代觀念的混淆

無異曲線的斜率是詮釋出兩種商品的補償關係，但因補償是以一種商品的增加來彌補另一個商品的減少的概念，此時，若在腦海中或在語言與口語上，說成：「是以一種商品的增加來替代另一個商品的減少的概念」，想起來、看起來、或講起來，都是很正常的概念。

換句話說，無異曲線的斜率表示的是一種**補償**的概念，而不是商品之間的消費的**替代**概念。但由總效用來定義互補品與替代品，其實，是將**補償**的概念與**替代**的概念混淆在一起。此時，我們的大腦的認知能力，容易掉入這個語言或文字含糊的陷阱之中。

當兩種商品存在於由總效用的角度上來看的替代或補償關係的時候，此時無異曲線為負斜率的直線，一種商品增加另一種商品必須減少才能維持在相同的無異曲線上，「一增」必然配合「一減」的特性，可能是導因於「補償」的原因，也可能是導源於「替代」的原因，這種兩樣詮釋皆可的含糊語意，使我們容易掉入這個含糊的思維陷阱之中，而將本質上是**補償**的維持相同總效用的概念與商品消費上的**替代**的概念混淆在一起。但在無異曲線為正斜率的時候，因為一樣商品數量增加另一種商品的數量也要隨之增加，才會維持在相同的一條無異曲線之上。當兩種商品的數量都必須增加之時，就沒有商品之間存在「替代性」的味道，所以不會將**補償**的概念與**替代**的概念混淆在一起。並且，因為正斜率的曲線上的每一點如果要構成同一條無異曲線，很容易發覺這怪怪的，因為若兩種商品都是愈多愈好的「好東西」，則兩種商品數量都比較多的點的無異曲線是會與兩種商品數量都比較少的點的無異曲線，不會是同一條無異曲線。而會比較容易發覺，正斜率的無異曲線不是表示兩商品之間的互補性關係，而是一種商品是邊際效用為正的愈多愈好的「好東西」，而另一種商品是邊際效用為負的愈多愈不好的「壞東西」。這或許多多少少可以解釋，為何不會將正斜率的無異曲線想成是互補品的原因。

4.6 無異曲線相對斜率大小的意義

負斜率的無異曲線表示，一種商品的數量變動，另一種商品的數量如何變動，以維持在同一條無異曲線上，也就是維持在相同的偏好尺度上。

更精確地說，若在任兩種商品都是商品邊際效用是正值的愈多愈好的「好東西」，則負向的無異曲線的斜率的(相對)大小，表示一種商品增加(減少)時另一種商品必須減少(增加)的(相對)幅度。

例如，消費者對商品 x 與商品 y 所構成的無異曲線的斜率為：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} < 0 \tag{29}$$

並且，同一位消費者對商品 x 與商品 z 所構成的無異曲線的斜率為：

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{U_x}{U_z} < 0 \tag{30}$$

我們進一步假設，兩者斜率的相對大小為：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} > \frac{dz}{dx} = -\frac{U_x}{U_z} \tag{31}$$

因為兩項斜率都是負值，比較小的負值，其實，絕對值是比較大的數值。比較小的負值，所對應的無異曲線的斜率其實是比較陡的圖形。

在前述的討論之下，當商品 x 增加一單位時，要維持在原來的無異曲線之下，商品 z 減少的數量會比商品 y 減少的數量多，也就是所必須放棄的數量商品 z 比商品 y 多。此圖，如〔圖 9〕所示。

又如，當商品 x 減少一單位時，要維持在原來的無異曲線之下，商品 z 增加的數量會比商品 y 增加的數量多，也就是所必須補償的數量商品 z 比商品 y 多。此圖，如〔圖 10〕所示。

接著，我們討論無異曲線為正斜率的情況。

此時，一種商品是邊際效用為正值的愈多愈好的「好東西」，而另一種商品是邊際效

用為負值的愈少愈好的「壞東西」，則正向的無異曲線的斜率的(相對)大小，表示，一種商品增加(減少)另一種商品必須增加(減少)的(相對)幅度。

例如，消費者對商品 x 與商品 y 所構成的無異曲線的斜率為：

$$(32)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} > 0$$

並且，同一位消費者對商品 x 與商品 z 所構成的無異曲線的斜率為：

$$(33)\qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{U_x}{U_z} > 0$$

我們進一步假設，兩者斜率的相對大小為：

$$(34)\qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{U_x}{U_z} > \frac{dy}{dx} = -\frac{U_x}{U_y} > 0$$

因為兩項斜率都是正值，比較大的正值，所對應的無異曲線的斜率是比較陡的圖形。

當商品 x 增加一單位時，要維持在原來的無異曲線之下，商品 z 增加的數量會比商品 y 增加的數量多，也就是所必須增加的數量商品 z 比商品 y 多。此圖，如〔圖 11〕所示。

又如，當商品 x 減少一單位時，要維持在原來的無異曲線之下，商品 z 減少的數量會比商品 y 減少的數量多，也就是所必須減少的數量商品 z 比商品 y 多。此圖，如〔圖 12〕所示。

5. 直角轉彎的完全互補圖形的意義

在詳細論述過「完全替代的負斜率直線的圖形」，並不適合用來描述兩商品之間的替代關係之後。接著，我們討論「完全互補的直角轉彎的圖形」的適當性。

先簡單回顧一下，在本文第二節中，知名教科書中的標準論述。其中，完全互補的定義是

> 「完全互補品為總是以固定比例一起消費的商品。以某種意義而
> 言，商品之間彼此是互為互補品。一個很好的例子是右鞋和左

> 鞋。消費者喜歡鞋子，但總是右鞋和左鞋一起穿。只有一雙鞋子中的一隻對於消費者而言並不會帶來什麼好處。」

圖形的表示，則是

> 讓我們畫完全互補品的無異曲線。假設我們挑選消費組合(10, 10)開始進行分析。現在增加 1 隻右鞋，而有(11, 10)。依假設，此新組合對於消費者來說無異於原先組合：多一隻鞋子不會對他帶來什麼好處**(**the extra shoe doesn't do him any good. **譯者：但不會帶來壞處嗎？)**。相同地，如果我們增加一隻左鞋：消費者對於(10, 11)和(10, 10)是無差異的。
>
> 因此無異曲線是 L 型，在 L 的頂點之處，左鞋的數量等於右鞋的數量…
>
> 同時增加左鞋和右鞋的數量將使得消費者移動至偏好更高的位置，所以愈向上和向右的無異曲線愈受偏愛…。

現在讓我們想一想，此「完全互補品是總是以固定比例一起消費的商品」的定義與「L 型的無異曲線」是不是傳達同樣的一件事？

「總是以固定比例一起消費的商品」，應該是指消費者對兩種商品的偏好，如對商品 x 與商品 y 的偏好，是一單位的商品 x 配合一單位的商品 y 的搭配，會優於一單位的商品 x 配合非一單位的商品 y 的搭配的偏好，以及，會優於非一單位的商品 x 配合一單位的商品 y 的搭配的偏好。也就是，以數學符號來表達是：

$$(35)\qquad \begin{cases}(x=y, y=x) \succ (x=y, y\neq x)\\(x=y, y=x) \succ (x\neq y, y=x)\end{cases}$$

並且，若商品 x 與商品 y 都是邊際效用為正值的愈多愈好的「好東西」，則表示

$$(36)\qquad (x_i=y_i, y_i=x_i) \succ (x_j=y_j, y_j=x_j) \text{ 若 } x_i=y_i > x_j=y_j$$

這表示「總是以固定比例一起消費的商品」的無異曲線圖應該是，如〔圖 13〕的在 45 度直線上的點狀圖，無差異的偏好的圖形只是在 45 度直線上的一個點接續一個點，沒有

所謂的無異曲線圖。

其實，「L 型的無異曲線」背後的偏好關係的數學意義，可表示如下：

(37) $$(x_i = y_i, y_i = x_i) \sim (x_i = y_i, y_j \neq x_i) \sim (x_j \neq y_i, y_i = x_i) \quad 若 \quad x_i = y_i < x_j = y_j$$

這種偏好關係，當然，不是「總是以固定比例一起消費的商品」的完全互補的意思。這種特殊的偏好的意義，是指消費者對於任何的商品組合的偏好次序只取決於商品 x 與商品 y 的數量剛好相等的數量大小，並且任何高於此相同數量的多出來的單一商品數量的多餘部分不會帶來任何影響。

舉例而言，「L 型的無異曲線」表示，消費者對「1 杯咖啡配 1 塊方糖」的偏好，等同於「1 杯咖啡配 2 塊方糖」的偏好，等同於「1 杯咖啡配 3 塊方糖」的偏好…，等同於「1 杯咖啡配 n 塊方糖」的偏好…，等同於「1 杯咖啡配無窮多塊方糖」的偏好；並且，消費者對「1 杯咖啡配 1 塊方糖」的偏好，等同於「2 杯咖啡配 1 塊方糖」的偏好，等同於「3 杯咖啡配 1 塊方糖」的偏好…，等同於「n 杯咖啡配 1 塊方糖」的偏好…，等同於「無窮多杯咖啡配 1 塊方糖」的偏好。

以常被採用的左鞋與右鞋的例子來說，「L 型的無異曲線」表示，消費者對「1 隻左鞋配 1 隻右鞋」的偏好，等同於「1 隻左鞋配 2 隻右鞋」的偏好，等同於「1 隻左鞋配 3 隻右鞋」的偏好…，等同於「1 隻左鞋配 n 隻右鞋」的偏好…，等同於「1 隻左鞋配無窮多隻右鞋」的偏好；並且，消費者對「1 隻左鞋配 1 隻右鞋」的偏好，等同於「2 隻左鞋配 1 隻右鞋」的偏好，等同於「3 隻左鞋配 1 隻右鞋」的偏好…，等同於「n 隻左鞋配 1 隻右鞋」的偏好…，等同於「無窮多隻左鞋配 1 隻右鞋」的偏好。

這時候，非但「多一隻鞋子不會對他帶來什麼好處**(**the extra shoe doesn't do him any good. **譯者：但不會帶來壞處嗎？)**」，恐怕「不斷增多的鞋子會對他帶來難以承受的災難」。

當你領悟到這一點時，會不會頓時覺得有一種極度荒謬的不可思議的感覺。面對這樣的經濟理論，真是令人無言以對！

因此，「總是以固定比例一起消費的商品」的完全互補定義，與「L 型的無異曲線」，不是傳達同樣的一件事。如前所述，完全互補的總效用圖形，在兩種商品的單位被標準

化為採取一對一的搭配方式時，只是在 45 度直線上的一個點接續一個點，沒有所謂的無異曲線圖。

此外，左鞋和右鞋的舉例，更不恰當，因為左鞋和右鞋是組合成一起販賣的單一商品，而不是兩項商品。這是很糟糕的舉例。

6. 序數效用理論的特質：單調轉換

在這一節的最後階段，我們要說明無異曲線的斜率在序數效用概念下的不變性或恆定性。序數效用的基本精神是只要是大小次序相同的效用函數都可以合格地用來表示相同的偏好關係。在數學的概念上，這是指一個效用函數經過任何正向的單調轉換之後所獲得的新效用函數也代表相同的偏好，連帶地，也隱含原先效用函數的一些(但並非全部)性質都一樣，在此，我們最關切的是無異曲線的斜率會不會因效用函數經過正向的單調轉換而有任何變動。

答案是不會的。我們接著就提供簡單明確的證明。

現在，我們將原先的效用函數 $U(x,y)$ ，透過正向單調傳換函數 $F(.)$ 且 $F'>0$ 與 $F''\gtrless 0$ ，轉成新的效用函數 $V(x,y)$ ，也就是：

(38) $$V(x,y)=F(U(x,y));\ \ F'>0,\ \ F''\gtrless 0$$

正向單調轉換的特性反映在轉換函數 $F(U)$ 的一階導數 $F'(U)>0$ 的特性上；而二次微分項可正可負，即 $F''(U)\gtrless 0$ 。

對總效用 $U(x,y)$ 進行正向單調轉換使它變成 $V(x,y)$ 之後，會衍生出以下的關係式：

(39) $$V_x=F'U_x,\ \ V_y=F'U_y$$

(40) $$V_{xx}=F'U_{xx}+F''U_xU_x,\ \ V_{yy}=F'U_{yy}+F''U_yU_y$$

(41) $$V_{xy}=F'U_{xy}+F''U_xU_y,\ \ V_{yx}=F'U_{yx}+F''U_yU_x$$

因為 $signV_x=signU_x$ 與 $signV_y=signU_y$ ，所以正向單調轉換前後的總效用函數所對應的邊際效用的正負符號相同；但是其相對大小無法確定，即 $V_x\gtrless U_x$ 與 $V_y\gtrless U_y$ 都可能成立，

正向單調轉換前後的邊際效用數值大小可能不相同。這表示邊際效用在序數效用分析法中，只有正負符號有意義，而其數值大小(絕對數值)沒有意義。

另外，因為 $F'' \gtreqless 0$ 皆可，所以我們可以獲得 $signV_{xx} \neq signU_{xx}$ 、 $signV_{yy} \neq signU_{yy}$ 、 $signV_{xy} \neq signU_{xy}$ 、 $signV_{yx} \neq signU_{yx}$ 的結果，即正向單調轉換前後的總效用函數所對應的純粹二階導數 U_{xx} 與 V_{xx} (以及 U_{mm} 與 V_{mm})的數值正負符號可能不同，並且交叉二階導數 $U_{xy}(=U_{yx})$ 與 $V_{xy}(=V_{yx})$ 的數值正負符號也可能不同；因此必須放棄總效用二次微分項正負所直接牽涉的與間接衍生的經濟意義，如邊際效用遞減原則與以總效用交叉微分項正負為基準的互補性定義。

單調轉換後的無異曲線或等總效用曲線的定義：

(42) $$V(x,y)=c;\ V_x \gtreqless 0,\ V_y \gtreqless 0,\ c \text{ 是常數}$$

也就是，等總效用曲線或無異曲線 $V(x,y)=c$ 的經濟意義，就是構成相同偏好或效用水準的各種不同商品組合 (x,y) 所連成的在 (x,y) 平面上的軌跡。

對等總效用曲線或無異曲線 $V(x,y)=c$ 進行全微分：

(43) $$V_x dx + V_y dy = dc = 0$$

等總效用曲線或無異曲線的斜率因此是：

(44) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{V_x}{V_y} \gtreqless 0$$

單調轉換前後的邊際效用，存在 $V_x = F'U_x$ 與 $V_y = F'U_y$ 的關係，將此關係代入上式，可得：

(45) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{V_x}{V_y} = -\frac{F'U_x}{F'U_y} = -\frac{U_x}{U_y}$$

也就是，效用函數經過正向的單調轉換不會改變無異曲線的斜率，因此無異曲線的斜率是一種效用不可衡量的序數效用理論的性質。

接著，我們再討論等總效用曲線或無異曲線斜率的變化率會不會受到單調轉換的影響。

無異曲線凸向原點隱含

$$(46)\qquad \frac{V_{xx}V_yV_y - 2V_xV_yV_{xy} + V_{yy}V_xV}{V_yV_yV_y}{}_{x} < 0$$

單調轉換前後的邊際效用，存在 $V_x = F'U_x$ 、 $V_y = F'U_y$ 、 $V_{xx} = F'U_{xx} + F''U_xU_x$ 、 $V_{yy} = F'U_{yy} + F''U_yU_y$ 、以及 $V_{xy} = F'U_{xy} + F''U_xU_y = V_{yx}$ 的關係，將這些關係代入上式，可以證明：

$$(47)\qquad \frac{V_{xx}V_yV_y - 2V_xV_yV_{xy} + V_{yy}V_xV}{V_yV_yV_y} = \frac{V_{xx}V_yV_y - 2V_xV_yV_{xy} + V_{yy}V_xV}{V_yV_yV_y} < 0$$

也就是，效用函數經過正向的單調轉換不會改變無異曲線斜率的變化率，因此無異曲線斜率的變化率是一種效用不可衡量的序數效用理論的性質。

7. 結論：由總效用來定義互補性是一條走不通的路

在現代個體經濟學的書籍中，於討論商品之間的互補性與替代性問題時，一開始就會畫出兩個大家非常熟悉的無異曲線圖來表示兩種最極端的商品關係。一是以負斜率的直線無異曲線表示完全替代的商品關係，二是以直角轉彎的無異曲線來描述完全互補的商品關係。

這篇文章的目的在指出無異曲線斜率只是取決於兩種商品邊際效用的正負關係。邊際效用為正的商品是愈多愈好的「好東西」，邊際效用為負的商品是愈少愈好的「壞東西」，效用為零的商品是數量多少無意義的「可有可無的東西」。

因此「完全替代的負斜率直線的圖形與完全互補的直角的圖形」，其實，與兩商品之間在消費上的替代性與互補性毫無關聯。這顯示現代個體理論連如此基本的替代與互補性關係都無法合理詮釋，甚至，可以說這樣的詮釋方式是很荒誕的。這顯示現代由總效用出發的個體理論無法通過正常的基本常識性門檻的考驗，應該把此理論丟進歷史的灰燼中，並尋找一項新的合理理論來填補將其拋棄後所遺留的真空。

我們需要一套全新的從第一個假設就與現今理論不同的新理論，並且我們也需要一整套新的很合乎直覺且很自然的替代與互補性的圖形。

我已經在林忠正(2015)的〈回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」：在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索〉的文章中介紹過能合理解決互補性難題的新理論，在下兩篇〈尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形 I：等序數邊際效用曲線〉以及〈尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形 II：序數邊際效用曲線〉文章中，我將畫出新理論的整套的完整且對稱的替代品與互補品圖形。[2]

Reference

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(1)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(2)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色：難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(3)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(I)：效用極大化的 Marshall 模型與無意義的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(4)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(II)：Marshall 的「邊際需求價格」模型與古典效用可衡量概念的意義〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(5)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為 Marshall 需求理論編寫一冊返回經濟學舞台的劇本： 比較商品效用與價格效用的邊際摸索決策方式的 Marshall 模型〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(6)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法：完成序數效用革命理論的誕生〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(7)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈經濟學新的跨界十字交叉(A New Cross-Cross)圖形：取代無異曲線圖示的跨界序數邊際效用分析法的新圖示〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(8)，研討論文。

[2] 對此題材有興趣的讀者，請參考林忠正 (2015)，〈序數效用革命的頭號戰犯：序數主義者眼中邏輯謬誤的常識性邊際效用互補性定義〉；林忠正 (2015)，〈為什麼我們需要一個新的互補性理論：無能的 Hicks-Allen 的互補性定義〉；林忠正 (2015)，〈回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」：在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索〉等文章的說明以及這些文章所引用的相關文獻。.

林忠正，(2015)，〈序數效用革命的頭號戰犯：序數主義者眼中邏輯謬誤的常識性邊際效用互補性定義〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(9)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為什麼我們需要一個純正的立基心理法則的序數互補性理論？：難覓古典的 ALEP 互補性定義的完美分身〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(10)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」：在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(11)，研討論文。

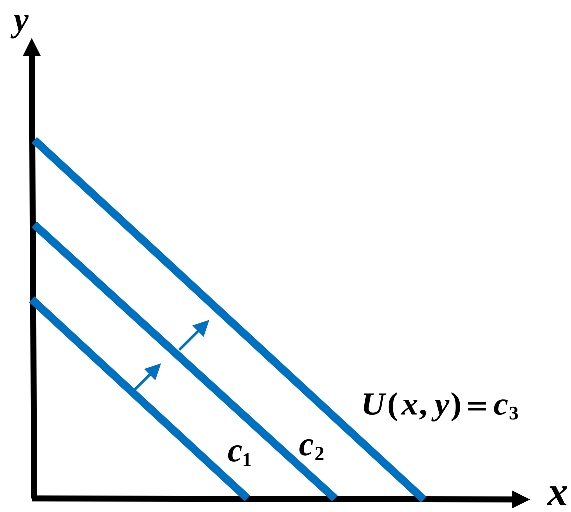
林忠正，(2015)，〈尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形 I：等序數邊際效用曲線〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(13)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈尋覓神秘的未曾現蹤的替代品與互補品圖形 II：序數邊際效用曲線〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(14)，研討論文。

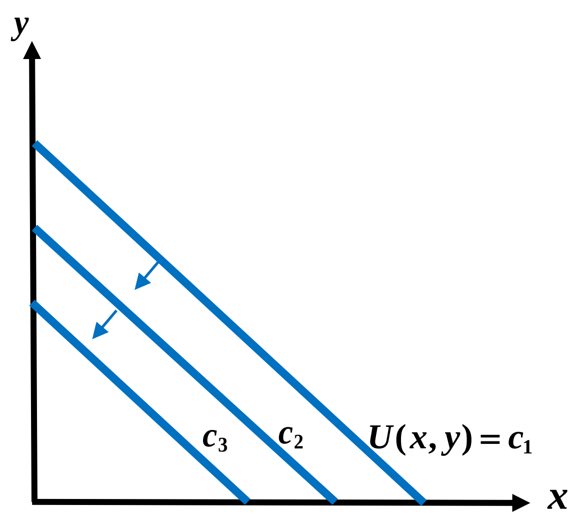
大陸學員，(2008)，〈歷史故事：不為色財所迷的馮京〉，正見網，http://big5.zhengjian.org/node/52908，2008/05/17。

Samuelson, P.A. (1974) “Complementarity: An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory,” *Journal of Economic Literature*, pp. 1255-1289.

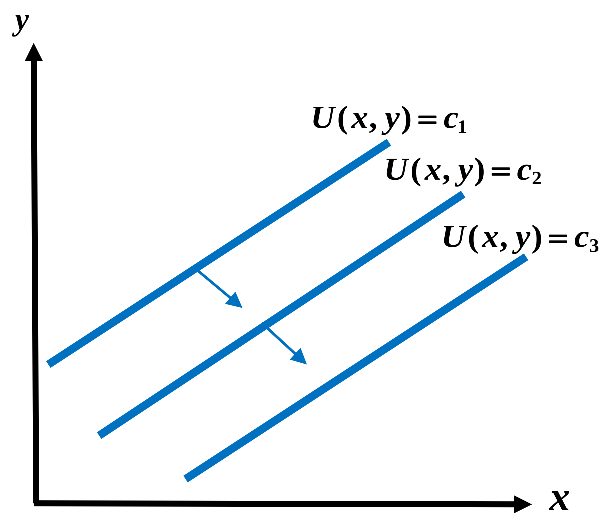
Varian, H.R. (1996) *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*, W&W Norton.



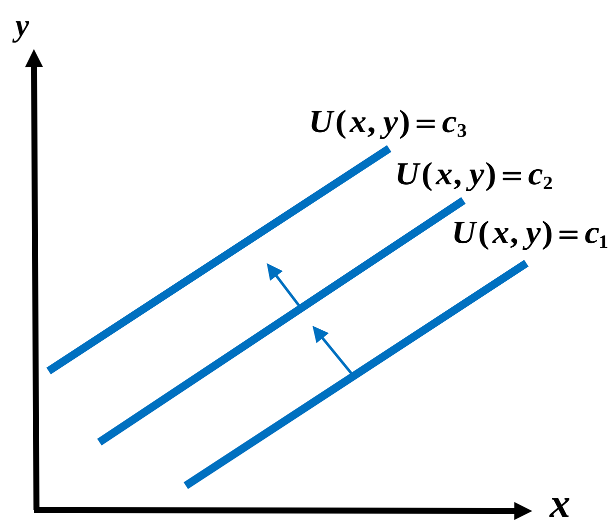
[圖 1]： x : goods; y : goods， $c_1<c_2<c_3$



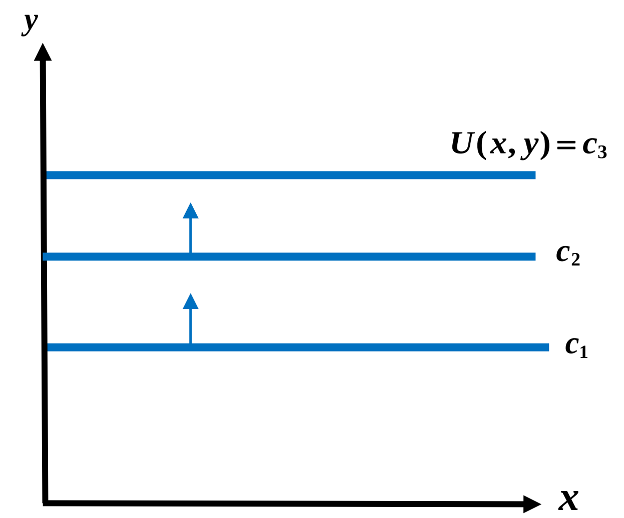
[圖 2]： x : bads, y : bads, $c_1<c_2<c_3$



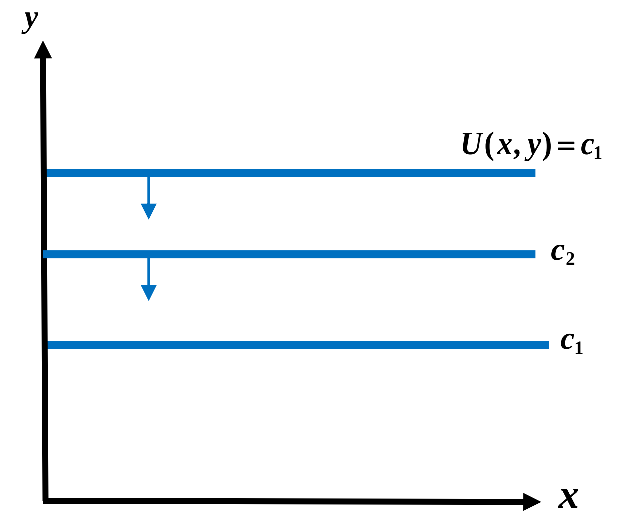
[圖 3]： x 是 goods; y 是 bads, $c_1 < c_2 < c_3$



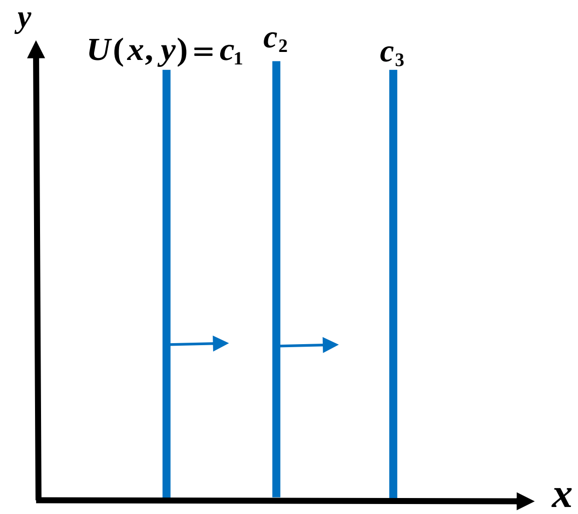
[圖 4]： x 是 bads; y 是 goods, $c_1 < c_2 < c_3$



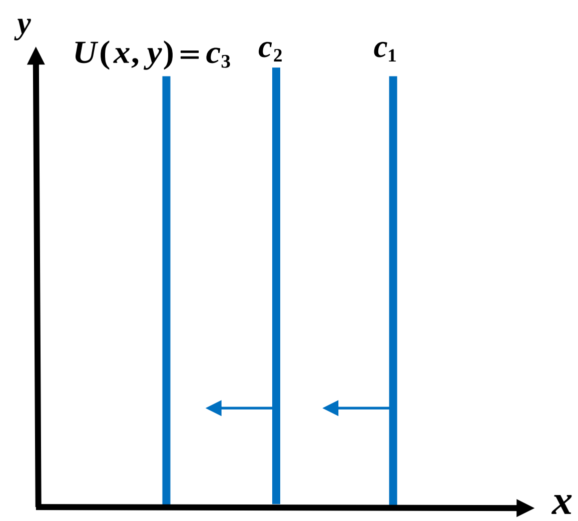
[圖 5]： x 是 neutral goods; y 是 goods, $c_1 < c_2 < c_3$



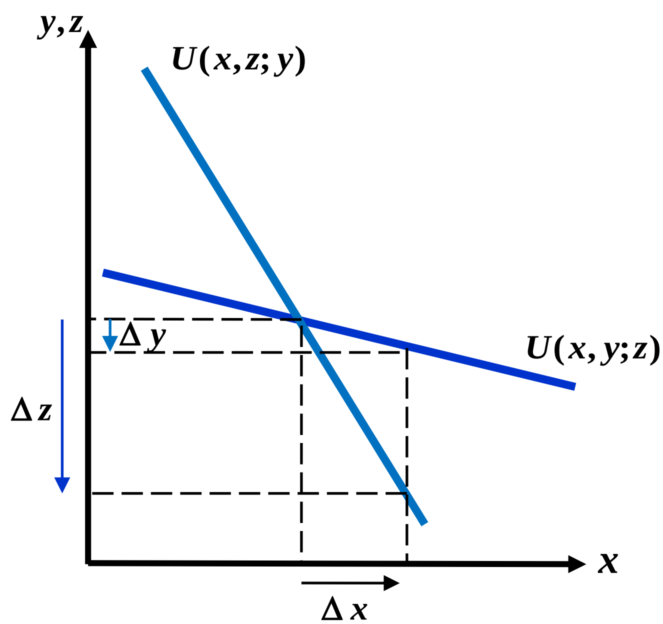
[圖 6]： x 是 neutral goods; y 是 bads, $c_1 < c_2 < c_3$



[圖 7]： x 是 goods; y 是 neutral goods, $c_1 < c_2 < c_3$

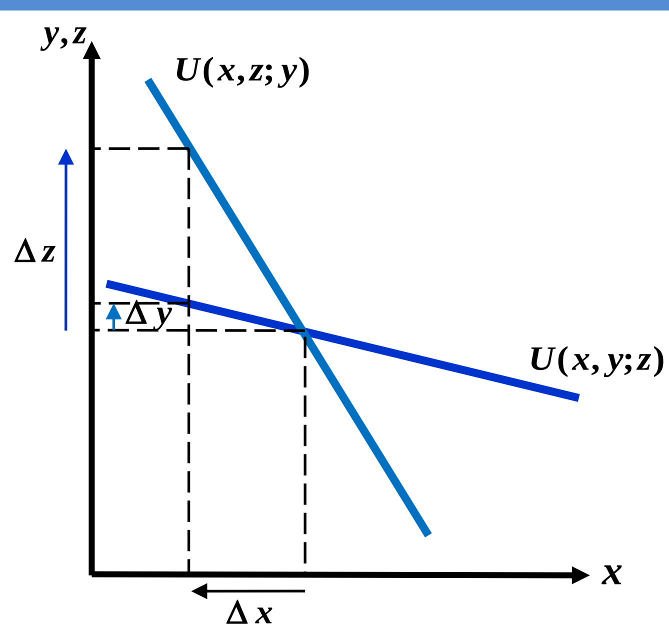


[圖 8]： x 是 bads; y 是 neutral goods, $c_1 < c_2 < c_3$



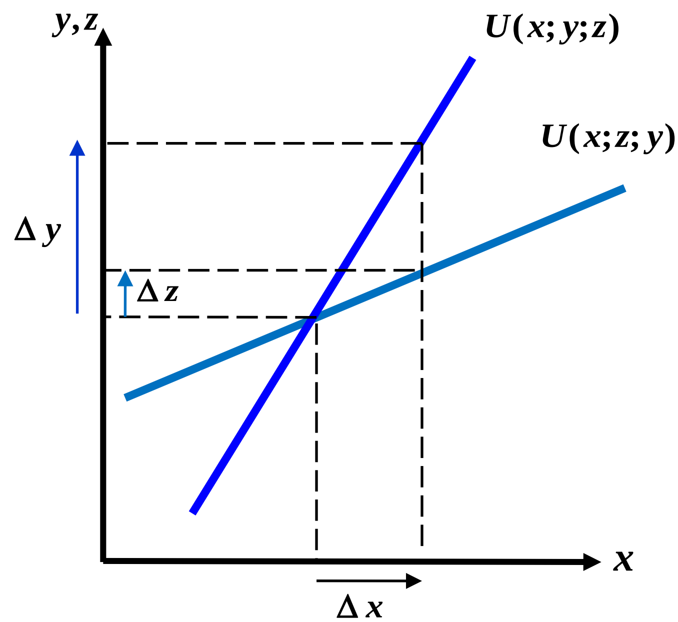
[圖 9] ：負斜率無異曲線：

$U(x,z;y)$ 比 $U(x,y;z)$ 陡，$\Delta x\uparrow$



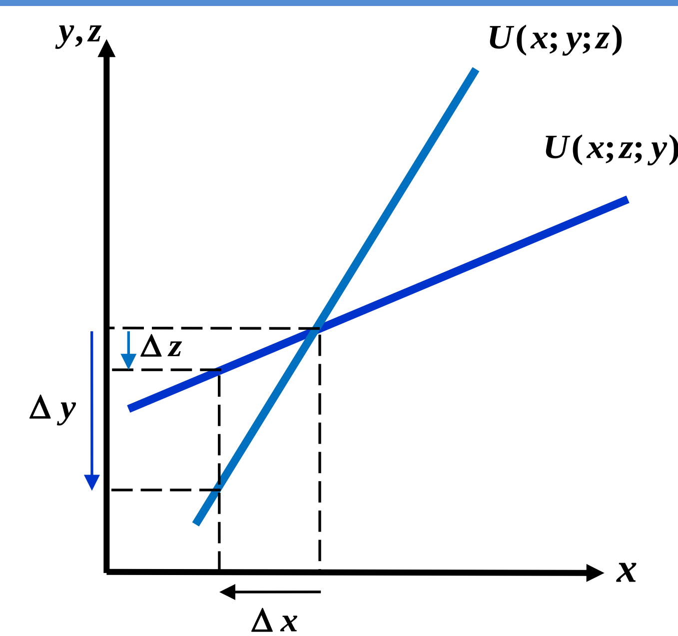
[圖 10] ：負斜率無異曲線：

$U(x,z;y)$ 比 $U(x,y;z)$ 陡，$\Delta x\downarrow$



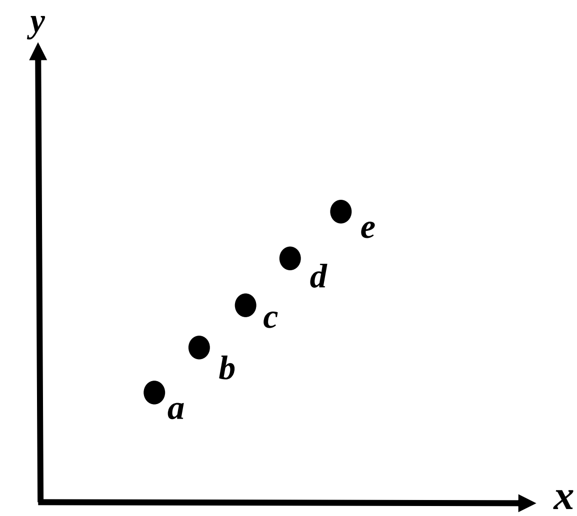
[圖 11] ：**正斜率無異曲線：**

$U(x;y;z)$ 比 $U(x;z;y)$ 陡，Δx↑



[圖 12] ：**正斜率無異曲線：**

$U(x;y;z)$ 比 $U(x;z;y)$ 陡，Δx↓



[圖 13] ：**完全互補偏好次序** $a \prec b \prec c \prec d \prec e$