

# 回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」

## 在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索

林忠正\*

中央研究院經濟所研究員

國立政治大學財政系教授

國立交通大學經營管理研究所教授

台北市南港區(115-41)研究院路 2 段 128 號

中央研究院經濟所

電話: 886-2-2782-2791 轉 507

電子信箱: [cclin@econ.sinica.edu.tw](mailto:cclin@econ.sinica.edu.tw)

開始撰稿-2015年11月3日

完稿時間-2015年12月31日

列印時間-2016年2月3日



---

\* 謝謝林曉珮助理非常有效率的協助，也很謝謝政大財政研究所江若妘同學的細心校稿。

## 回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」

### 在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索

**[摘要]**在 1930 年代，Allen (1934)發現 Edgeworth-Pareto 的互補性傳統定義與 Pareto 深具說服力的序數效用的概念不能並存，這激發 Hicks and Allen (1934)展開影響深遠的改變經濟學個體選擇理論發展軌跡的需求理論重建任務。Samuelson 是一位堅定的序數效用主義者，因為他在 1938 年發表的一篇研究心得證明序數效用的對手理論——基數效用理論，在真實世界中出現的機率是「無窮地不可能的」(infinitely impossible)。但是，雖然 Samuelson 身為一位序數效用主義者，卻無法認同 Hicks and Allen (1934)所提出的替代性與互補性的序數效用主義者的定義，或許可以說，Hicks and Allen (1934)的替代性與互補性定義一直令他感到不安。這也難怪 Samuelson (1947)剛取得博士學位時認為「在我看來互補性問題，已受到超過其內在重要性所值得關注的程度」，但在四十年名滿天下之後立場 Samuelson (1974)卻劇烈轉變成感嘆說「最簡單的東西往往是最複雜去充分理解的」。從而在 Hicks and Allen (1934)所掀起滔天巨浪的序數革命正好四十年之後，Samuelson (1974)發表了一篇名為〈互補性：關於希克斯-艾倫在需求理論革命 40 週年的一篇論文〉(Complementarity: An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory)的論文，非常刻意地耿耿於懷地，想盡辦法希望在維持效用是序數的概念之下，還能夠間接地以 Edgeworth 與 Pareto 所採取的傳統的以總效用二次微分項正負來定義互補品與替代品的概念，以帶領傳統理論的支持者或序數效用理論的反對者回到自然所許諾的，但卻被 Pareto、Hicks、Allen 和 Samuelson 這些現代序數主義者將其驅逐而出的，自自然然的互補性的「應許之地」(the promised land)。但 Samuelson 的努力顯然沒有改變僵局，我們還是回不到自自然然的互補性的「應許之地」。最簡單的東西仍然是最難去充分了解的。這篇文章的目的，要用林忠正所率先提議發展的「跨界的得與失的序數邊際效用分析法」展示「最簡單的東西應該是最容易去充分了解的」的正常直覺，以及如何平平順順地合情合理且心安理得地踏上返回自自然然的互補性的「應許之地」。

**JEL 分類: B120, B130, B210, D010**

**關鍵詞: 跨界、得與失、序數、基數、邊際效用、互補**

在我看來互補性問題，已受到超過其內在重要性所值得關注的程度。<sup>1</sup>

Samuelson (1947)

時機成熟了，是對互補性概念做一次新鮮的、現代的觀察的時候了。不管概念的內在優劣是什麼，四十年前它有助於激發 Hicks 和 Allen 執行古典序數需求理論的「重新考慮」(reconsideration)。而且，我希望在此展示，不論是擅長於文字的或數理的經濟學家關於此古老的當務之急的最後一句還沒有被說出來的話。<sup>2</sup>

Samuelson (1974)

最簡單的東西往往是最複雜去充分了解的。<sup>3</sup>

Samuelson (1974)

現在，我們已經有一個良好穩固的效用度量方式可以運用了，那些渴望穩固而簡單的互補性測量方式的人可以感覺到又回到了 Pareto 和我們這些其他的現代序數主義者將其逐出(drive out)的應許之地(the promised land)了。而現在，他們已經沒有必要放棄自己想要的麵包並勉強定居於(settle for)由後 Slutsky 作家所提供的佈滿石頭的貧瘠之地了。<sup>4</sup>

Samuelson (1947)

最近試圖構建...的消費理論是否會導致重新引入邊際效用於消費行為的分析之中...。截至今天，這個問題仍然是處於等待解答的狀態。

Hudík (2014, p.690)

<sup>1</sup> In my opinion the problem of complementarity has received more attention than is merited by its intrinsic importance.

<sup>2</sup> The time is ripe for a fresh, modern look at the concept of complementarity...the last word has not yet been said on this ancient preoccupation of literary and mathematical economists.

<sup>3</sup> The simplest things are often the most complicated to understand fully.

<sup>4</sup> Now that we have a good solid utility metric to work with, those who hanker for a solid and simple measure of complementarity can feel back in the promised land from which Pareto and others of us modern ordinalists drove them out. And now they have no need to give up the bread they want and settle for the sophisticated stone proffered them by post-Slutsky writers.

最簡單的東西應該是最容易去充分理解的。

林忠正(2015)

英國作家洛威斯迪金生(Lowes Dickinson)曾經批評科學家們「不僅有很深的偏見，而且還認為自己的偏見價值連城。」這句話也適用在自視甚高的知識份子身上。

湯姆斯·索爾(Thomas Sowell 2009)

《知識份子與社會》(*Intellectuals and Society*)

作家喬治歐威爾說過：「有些想法相當愚蠢，愚蠢到只有知識份子才會相信，一般人不會輕易相信它。」拿上個世紀的知識份子為例，他們的確愚蠢到令人驚訝的地步。

湯姆斯·索爾(Thomas Sowell 2009)

《知識份子與社會》(*Intellectuals and Society*)

真誠的無知，認真的愚昧。

不知名

只有經濟學家才會相信這種說法。

## 1. 最簡單的東西往往是最複雜去充分理解的

熟悉經濟學互補性相關文獻的人，不需要我說明，一眼就會了解「回到被序數主義者驅離的互補性『應許之地』」的出處與所指為何，也會了解寫下「在 Hicks-Allen 序數革命 81 年後的再度探索」副標題的意圖，是為了對照發表於 41 年前的 1974 年的一篇著名的〈互補性：關於 Hicks-Allen 需求理論革命 40 週年的論文〉的副標題。

對於不清楚發生於 1930 年代需求理論重建故事(由 Marshall 式需求理論革新為 Hicks 式的需求理論)的人，或不了解關於序數與基數效用理論歷史發展典故的人。可能無法想像咖啡和茶葉應該是替代品而咖啡和牛奶是互補品，如此簡單直覺的連小學生都懂的問題，有什麼好討論的。這也就是，為什麼 Samuelson (1947)在年輕氣盛的時候會直覺地說：「在我看來互補性問題，已受到超過其內在重要性所值得關注的程度」，而 Samuelson (1974)轉而改變立場感慨地說：「最簡單的東西往往是最複雜去充分理解的。(The simplest things are often the most complicated to understand fully.)」並且，不瞭解序數效用革命相關歷史真實故事的學者，可能無法想像 Hicks-Allen 需求理論革命為什麼要和互補性的概念綁在一起呢？也無法理解互補性與聖經中的「應許之地」的故事有何關聯。

在下一節中，我們先簡單介紹 Hicks-Allen 需求理論革命為什麼會和互補性的概念綁在一起的典故。在下下一節中，我們再說明為何身為序數效用者的 Samuelson (1974)在 Hicks-Allen 需求理論革命 40 週年之後，還感到有必要甚至有義務要把經濟學家帶領「回到被序數主義者驅離的互補性『應許之地』」的原因。

## 2. 為什麼序數效用革命與互補性的定義有關

為什麼 Hicks-Allen 需求理論革命會和互補性的概念綁在一起呢？單刀直入地說，Hicks-Allen 需求理論革命是起因於，Allen 在 1934 年發現，當時經濟學家所採用的互補品與替代品的定義，與 Pareto 自無異曲線特性所領悟出的序數效用概念無法並存。因此，要引入進步的不可衡量的序數效用概念於個體選擇理論中，第一個要克服的障礙就是立基於交叉邊際效用變化方向的互補性定義，此定義也就變成序數效用革命的頭號敵人。

在序數效用革命之前，當時經濟學家採用交叉邊際效用變化方向來定義互補品與替代品，若總效用的二次微分項(或交叉邊際效用的變化方向)為正就是互補品、為負就稱為替代品、為零則稱為獨立品。此定義由兩位銀行家 Auspitz 與 Lieben 率先提出，而知名的學者 Edgeworth 與 Pareto 也採用此定義。因此對文獻熟悉的學者會稱之為 Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto (ALEP)的互補性定義，對文獻比較不熟悉的學者可能會稱它為 Edgeworth-Pareto 的互補性定義。

Pareto 由無異曲線意識到需求理論可以只建立在偏好尺度所對應的(序數)效用函數的概念之上，也就是只要能反映相同偏好次序的任何效用函數都可以用來表述相同的偏好排序關係，並且也都可以獲得相同的消費者均衡條件。

Allen (1934a)於《計量經濟學刊》(*Econometrica*)發表的論文〈不同互補性和競爭性商品定義的比較〉(A Comparison between Different Definitions of Complementary and Competitive Goods)中指出，在 Pareto 偏好尺度的概念下，Edgeworth-Pareto 以總效用二次微分項正負符號來定義互補品與替代品的概念，不再適用。因此要採用序數效用的分析架構，必須提出新的定義來加以取代。

在這篇發表於《計量經濟學刊》(*Econometrica*)的論文中，Allen 在保留邊際效用遞減的概念下，<sup>5</sup>嘗試比較 Edgeworth-Pareto 所採取的定義與他自己在同一年一篇以德文發表的論文(Allen 1934b)中，利用 Johnson 的「無異方向」(direction of indifference)，即無異曲線斜率的概念，所提出的新的替代性與互補性定義。<sup>6</sup>Hicks 讀到 Allen 的文章並了解了 Allen 的想法，透過彼此的討論激發 Hicks 和 Allen 執行古典序數需求理論的「重新考慮」(reconsideration)，透過他們 1934 年合作出版的劃時代作品，導致經濟學的重大變革，這項變革的強大影響力延續至今未墜。<sup>7</sup>

為什麼 ALEP 互補性定義，不能與序數效用不可測量性的概念和平共存呢？其根本性的癥結是因為序數效用的基本精神是任何大小次序相同的數列都可以合格地表述相同的偏好關係。其中，這概念背後一個數學上的明確含意是：一個合格的序數效用函數

<sup>5</sup> 在保留邊際效用遞減的概念下，批評 Edgeworth-Pareto 以總效用的二次微分項的正負符號來定義互補品與替代品的概念的做法，當然是互相矛盾的做法。這顯然要放棄常識性的邊際效用遞減法則是相當不容易的事，即使對後來促成序數效用革命的理論的主要建構者來說也是一樣困難。

<sup>6</sup> 由於 Allen (1934a)所採取的互補性的定義相當繁瑣，所以我沒有意圖在此作介紹。我計畫撰寫另一本有關《經濟學互補性的故事》的書，在該書中會較詳細地介紹 Allen 當時的想法。

<sup>7</sup> 參見 Hicks and Allen (1934)中文章 Hicks 所撰寫的部分的說明。

經過任何正向的單調轉換，所獲得的新效用函數也同樣可以合格地用來代表相同的偏好關係。但是，單調轉換前後同樣合格的不同效用函數，所對應的交叉邊際效用的符號，卻是有一些是正值、有一些是負值、而有一些是零。因此，序數總效用與 ALEP 的互補性定義是天生無法共生的概念。

我們就直接應用單調轉換的特性，明確地呈現這不可並存的敵對關係。以下的式子，就可以捕捉到序數效用函數單調轉換的特性，

$$(1) \quad V(x, y) = F(U(x, y)); \quad F' > 0, F'' \geq 0$$

其中  $U(x, y)$  是原先的總效用函數， $V(x, y)$  是經過正向單調轉換後所得到的新總效用函數，正向單調轉換的特性反映在轉換函數  $F(U)$  的一階導數  $F'(U) > 0$  的特性上。正向單調轉換只規範總效用數值的大小排列次序不能因函數轉換而改變，並不要求兩個總效用之間的差值要維持任何規律性，即只要求  $F'(U) > 0$  的特性，但  $F''(U)$  的方向不受規範，因此， $F''(U) \geq 0$  皆可適用。

對總效用  $U(x, y)$  進行正向單調轉換使它變成  $V(x, y)$  之後，會衍生出以下的關係式：

$$(2) \quad V_x = F'U_x, \quad V_y = F'U_y$$

$$(3) \quad V_{xx} = F'U_{xx} + F''U_xU_x, \quad V_{yy} = F'U_{yy} + F''U_yU_y$$

$$(4) \quad V_{xy} = F'U_{xy} + F''U_xU_y, \quad V_{yx} = F'U_{yx} + F''U_yU_x$$

其中， $U_{xy} = U_{yx}$  與  $V_{xy} = V_{yx}$ 。

因為  $\text{sign}V_x = \text{sign}U_x$  與  $\text{sign}V_y = \text{sign}U_y$ ，所以正向單調轉換前後的總效用函數所對應的邊際效用的正負符號相同；但是其相對大小無法確定，即  $V_x \geq U_x$  與  $V_y \geq U_y$  都可能成立，正向單調轉換前後的邊際效用數值大小可能不相同。這表示邊際效用在序數效用分析法中，只有正負符號有意義，而其數值大小(的絕對數值)沒有意義。另外，更重要的是，因為  $F'' \geq 0$  皆可，所以我們可以獲得  $\text{sign}V_{xx} \neq \text{sign}U_{xx}$ 、 $\text{sign}V_{yy} \neq \text{sign}U_{yy}$ 、 $\text{sign}V_{xy} \neq \text{sign}U_{xy}$ 、 $\text{sign}V_{yx} \neq \text{sign}U_{yx}$  的結果，即正向單調轉換前後的總效用函數所對應的純粹二階導數  $U_{xx}$  與  $V_{xx}$  的數值正負符號可能不同，並且交叉二階導數  $U_{xy}(=U_{yx})$  與  $V_{xy}(=V_{yx})$  的數值正負符號也可能不同；因此必須放棄總效用二次微分項正負所直接牽涉

的與間接衍生的經濟意義，如邊際效用遞減原則與以總效用交叉微分項正負為基準的互補性定義。

方程式(4)在序數效用革命發展史中扮演著非常重要的角色，就我對文獻的追蹤與了解，這方程式首次是出現在 Allen (1934a, *Econometrica*) 的文章中，然後又先後兩次出現在 Hicks and Allen (1934, *Economica*) 分成上下兩集的長文之中。Hicks and Allen (1934) 文章中的第一部分由 Hicks 所執筆，是他們理論的文字說明；第二部分由 Allen 主筆，是他們理論的數學推導。在 Hicks 所執筆的文字說明部分，Hicks 極力避免使用任何數學方程式來進行分析與討論，在此文字風格的文章中唯一出現的而且是刻意安排出現於註腳中的方程式，就是(4)式的這條二次交叉微分項的方程式。在後續的一些文章中，如 Bernardelli (1938)、Samuelson (1939, 1947)、Bernardelli (1952)、Lancaster (1953)、Silberberg (1978)……，也屢次出現此方程式。

Bernardelli (1952)就清楚地認識到這條總效用的二次微分項為經濟理論帶來極大的麻煩，因此感慨地指出：

但這個認知導致了一個非常尷尬的兩難困境。當效用僅可以以內含程度或強度的性質進入經濟學的方程式時，如果  $U$  是效用的一個序數指標，那麼  $U$  的任何單調轉換將必須擁有相同的權利作為另一個(相同的)指標。但是，當我們選擇任意一個函數  $F(u)$ ，它只受到條件  $F' > 0$  的限制，接著我們會發現，只有關係式(2)保持原狀。在(3)和(4)的二階導數在轉換後，不一定能給出相同的方向(符號)。實際上，這些關係式……一般而言只有當  $F'' = 0$  時才會同時存在。但是， $F$  的選擇受到這樣一個嚴格的限制會使得效用的序數性質當然變得毫無意義。如果這種限制是有效的，我們其實應該就會擁有一個可以以基數測量的效用……所導致的明顯後果是，要不是說當我們在傳統意義上談到遞減的邊際效用和互補性時是在胡謔，就是說我們(非法地)假設效用具備一個基數的衡量方式。乍看之下(Prima facie)這種脫節不是很合理的。

面對序數總效用的核心概念與交叉邊際效用變化方向的經濟意義不能並存的僵局。在一般經濟學家看來只有兩條路可以走，兩條互相排斥而各有利弊的道路。一條道路是放棄當時新發展的正常的效用數值只能排序的偏好理論而同時繼續保留舊的常識



性的以交叉邊際效用變化方向來定義替代互補品的概念，另一條完全相反的道路則是堅持當時新的較合理的效用數值只能排序的偏好理論而放棄使用歷史較久的常識性的以交叉邊際效用變化方向來定義替代互補品的概念。面對這種利弊互見而進退兩難的困境，只能從中擇一而行。

對於序數效用理論主要的建構者與推廣者，英國經濟學家 Hicks 來說，放棄序數效用理論等同於要接受效用是可衡量的概念，Hicks 強烈主張效用是不可衡量的，效用可衡量是最不能妥協也是最不能被接受的概念，是效用理論當時最需要突破的關鍵點。在意圖邁進或走上建構一套具有合理的效用(不可衡量)概念的消費者選擇理論的大道上時，套用 Hicks (1956)在《需求理論之修正》(*A Revision of Demand Theory*)一書中第一章結尾時所說的一句話：「有一個惡魔(一隻惡龍)擋在路口必須優先加以消滅並將牠驅離此大道——牠就是效用可以衡量的老難題」(There is a dragon waiting at the door who must first be cleared out of the way. It is the old crux of the measurability of utility.)。由理論建構的理念角度來看，Hicks 認為效用可以衡量的概念是「惡魔」，是一定得先除之而後快的最主要的敵人；所以 Hicks 在兩害相權取其輕的考量下，走上一條放棄常識性的邊際效用遞減法則與以(交叉)邊際效用的變化方向來定義替代互補品的道路。<sup>8</sup>

如何擺脫明顯不合理的效用可測量性的糾纏是長久以來經濟學家百思不得其解的老難題，序數效用概念提供如何治癒效用可衡量「惡疾」的一劑靈藥。因此，應該不計代價趕快嘗試採用看看，傳統正常的符合常識的互補性定義只好犧牲小我以成就大我了。

放棄常識性的以邊際效用變化方向來定義替代互補品的概念，那要怎樣定義替代品與互補品呢？Hicks 和 Allen 只好進一步主張以一種極不自然的方式來定義替代與互補品的概念。簡單地說，Hicks (1939)在《價值與資本》書中所鼓吹的其中一種定義，認為要定義兩種商品的替代與互補關係，必須要動用到三種商品的故事場景才能找到出路(我認為只用兩種商品不能定義替代品與互補品的說法，是相當大膽的想法!)。Hicks 主張當  $X$  增加使  $Y$  與  $Z$  (其中  $Z$  代表所有其他物品的組合物，如貨幣)的邊際替代率(即  $Y$  與  $Z$  在同一條無異曲線上的斜率)增加，則  $X$  與  $Y$  是互補品；若降低則是替代品。

另一種常見的用來取代 Edgewort-Pareto 所採取的傳統的以總效用二次微分項正負

<sup>8</sup> 改換從現實的角度來思考，如果 Hicks and Allen 接受較早的互補性定義，則沒有他們可以發展出新理論的空間了。

來定義互補品與替代品的概念，則是「以  $x$  商品的價格提高在所得受到補償下以維持在同樣的效用水準下， $y$  商品的需求數量的增減來定義互補品與替代品。」

另外，Allen (1934a, *Econometrica*) 的文章中，所提出的概念似乎與這兩項概念是不一樣的，但因為很複雜，很難三言兩語講清楚，所以我不在此加以介紹。這顯示，要提出一合理的替代理論是很麻煩的不自然的事。

但你應該看得出來，魔鬼藏在細節裡，這個定義是一種既奇怪又不自然的定義方式。<sup>9</sup>序數效用理論的支持者，同時也是基數效用理論的反對者 Samuelson (1974) 在 Hicks and Allen (1934) 年推動的序數效用革命的鉅作發表 40 年之後，還是對 Hicks and Allen 的替代互補性定義深感不安，而想盡辦法想在序數效用或預期效用理論的新架構下挽回傳統的 AEP 定義。

或許更傳神的說法是，對 Hicks 來說，效用的可衡量性是一個罪大惡極的惡魔，消滅這惡魔是最優先的要務，一項正常的消費者選擇模型中效用不應該是可衡量的，這是個人選擇理論中最不應該妥協的最基本前提。在這項最優先的前提下，自然就會出現「**若事實(如正常的替代互補品觀念)與核心理論(序數效用理論)不符，就應該加以拋棄，甚至會主張與理論不符的事實就錯了**」的怪異思維方式。

一個例子就出現在 Silberberg (1978) 知名的數理經濟學教科書《經濟學的結構：數學分析》(*The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*) 中，所呈現的天真的說法：

「與此類似，經濟學家曾經以邊際效用來定義互補或替代品：兩個商品被稱為互補品，如果消費更多的其中一種商品會提高另一種商品的邊際效用；反之為替代品。例如，有人認為，一個人增加餅乾(*pretzels*) 數量會提高啤酒的邊際效用，因此啤酒和餅乾是互補的。上面的代數結果說明了為什麼這種推理是錯誤的。(The algebra above shows why this reasoning is fallacious.) 此定義被考慮的條件是  $\partial U_i / \partial x_j = U_{ij} = U_{ji}$ 。但如果  $U_{ij} > 0$ ，譬如說，某一單調轉換使得  $\partial V_i / \partial x_j = V_{ij} < 0$ ，所以符號與  $U_{ij}$  相反，並且這還意味著需求關係中，兩者被觀察到的是同一行為。因此，這個定義不能用來分類可觀察到

<sup>9</sup> 他們提出的另一定義是當一種商品的價格上升時，在所得受到補償之下，另一種商品的需求量若增加，則是替代品；若另一種商品的需求量減少，則是互補品。

的行為，因此是無用的。(Hence this definition is incapable of categorizing observable behavior and is thus useless.)」

體會到單調轉換這一條方程式所傳達的特性，就可以了解為什麼，由 Allen (1934a, *Econometrica*)與 Hicks and Allen (1934, *Economica*)開始，很多經濟學家主張放棄「ALEP 的互補性定義」的關鍵原因，這也是我們現在於一般的個體經濟學教科書中，看不到符合直覺的 ALEP 的互補性定義的原因，而會發現替代互補的定義必須要透過相關商品價格與需求數量的共變關係來定義的緣故。

必須放棄邊際效用遞減法則與 ALEP 的互補品定義，是一項具有重大爭議的做法。很多經濟學家深深以為不可，例如與 Hicks 和 Allen 一同參加 Robins 在倫敦政經學院所舉辦的研討會的同輩經濟學家，Bernardelli (1938)就曾感慨地指出：

…Pareto 從根本上講是正確的，這是沒什麼可認真爭議地：任何經濟學的法則必須以一種它不受效用指數函數的任意選擇所影響的方式來加以建構。<sup>10</sup>

這是否意味著經濟學必須忍受所有的截肢的苦痛才能走上 Pareto 學派之路？邊際效用理論終於走到了盡頭，由它自己的支持者把它遞交出來(自己承認失敗)呢？這是否意味著邊際效用概念這個基石，必須被打落至理論結構之外；沒有選擇地，只能以行為主義如 Pareto 在他關於無差異曲線的「實驗性」的解釋中已經指出的，和 Allen 和 Hicks 最近藉由「邊際替代率」為準則的理論所提出的互補性理論的可怕的光線之下來解釋經濟學的基礎嗎？<sup>11</sup>

Bernardelli (1938)繼續批評說：

…舊的 Edgeworth-Pareto 互補性定義…有一個完美的簡單的心理意

<sup>10</sup> Any law in economics must be formulated in a way that it is not affected by arbitrary choice of the utility index function.

<sup>11</sup> Does this mean that economics has to go the way of the Paretian school with all its bitter amputations? That the marginal utility theory finally has come to an end, being surrendered by its own supporters? Does it mean that the cornerstone, the marginal utility concept, being broken out of the structure of theory there is no choice but to interpret the foundations of economics in the dire light of Behaviourism as Pareto has indicated already with his “experimental” interpretation of the indifference curves and as Allen and Hicks recently proposed for the theory of complementarity by using the “marginal rate of substitution” as a criterion?

義。當它似乎不適合數學效用分析的傳統分析工具時，不是貿然得出結論，認為它是「毫無意義的」(senseless)，反而應該已經得出結論，指出某人的方法是錯的。它不應是有爭議的，新行為主義藉由所謂的「邊際替代率」(marginal rate of substitution)的互補性定義可能有正當的意義，以及在統籌中證明是有用的，例如，價值的理論和生產的理論。在這裡所想要反駁的是聲稱新的方法是唯一合法的觀點。顯然，有兩種定義互補性的方法：心理方面的定義，這定義一直到現在都被數學經濟學所採用，它具有十分簡單和洞察力的優點，以及行為主義的定義方式，這定義在未來可能導致有價值的結果。自然地這兩個定義不會導致相同的結果，但是這不是需要焦慮的理由。定義沒有真的或假的；什麼方法被採用僅僅是基於方便性或好用的考量，如果同時使用這兩種方法，只意味著含糊其辭並不意味著真正的矛盾。<sup>12</sup>

十多年後，Bernardelli (1952)在發表於同一期刊上的另一篇論文一開始的引言中，更進一步批評序數效用分析法是一種安徒生的童書《國王新衣》(*The Emperor's New Clothes*)等級的荒謬理論，暗喻支持的經濟學家不如敢天真且誠實地大聲地喊出：「國王什麼都沒穿」的純真小孩。

Bernardelli (1938)批評說：

科學不僅僅是要創造，而且還要保存，並且最可靠保證的進步在於思想具有連續性的清晰可辨路線。必須沒有武斷和人為革命。如果變化可以無緣無故地被引入，科學的真理只能無望地自首或屈服於流行的幻想。公眾有權利知道為什麼在過去二十多年裡經濟學的語言已經

<sup>12</sup> By means of this simple alteration we have thus succeeded in re-establishing the old Edgeworth-Pareto definition of complementarity. This result should not come as a surprise; the old definition had a perfectly straightforward psychological meaning. Instead of rashly concluding that it was "senseless" when it did not seem to fit into the traditional apparatus of mathematical utility analysis one rather should have concluded that one's methods were at fault. It shall not be disputed that the new behaviouristic definition of complementarity by means of what is termed the "marginal rate of substitution" may have a legitimate meaning, too, and may prove useful in co-ordinating, e.g., the theories of value and of production. All that is refuted here is the claim that the new method is the only legitimate one. Obviously there are two methods of defining complementarity: the psychological one which has been used by mathematical economics so far and which has the advantage of great simplicity and lucidity and the behaviouristic way which may lead to valuable results in the future. Naturally the two definitions will not lead to the same results but this need not give reason for anxiety. Definitions cannot be true or false; it is a mere matter of convenience as to what method is adopted and if both methods be used simultaneously mere equivocations will not mean real contradictions.

被改得面目全非(變得無法辨認),為什麼曾經是教科書的支點或軸心的光亮耀眼的真理已經被拋棄,為什麼再也聽不到主觀價值理論的創造者認為給予他們很大的啟示的邊際效用概念,為什麼簡單的互補性商品像麵包和奶油,現今要求第三個維度(存在第三種物品),為什麼價值理論整體確實已經變形為數學抽象的混亂,混亂似乎以巴洛克式的繁榮逐日增加,並且正迅速成為課堂上的噩夢。<sup>13</sup>

如果所需要的解釋不能到位,群眾有權利恢復到那些簡單的、清晰的和有效的價值理論的公式,這些公式可被發現於如在古典的論文中,這些論文可被賦予—不是不相稱的—的標題:政治經濟學的常識(The Common Sense of Political Economy)。<sup>14</sup>

在為論文寫下結論時, Bernardelli (1952)有感而發地沉痛地呼籲經濟學家:

這是責無旁貸的事,所有那些正忙著編織經濟理論新衣服的人,應該將他們自己創作的引人入勝的新奇工具放在一旁,並停下來想一想或反省反省,他們正真正在做什么事。事實上,所有作者一直硬將經濟學的問題強迫性地塞入偏好尺度和邊際替代率的緊身衣中,特別是那些似乎最近因為被啟發而接受這樣的尺度的作者們,都應特此鄭重合法地暫停他們的勞動,直到他們有義務能夠圓滿地回答以下的問題:為什麼任何人都應該被限制去遵守唯有無異曲線斜率的性質才應該被使用來公式化經濟學法則的幻象的規則(其中似乎沒有什麼權威

<sup>13</sup> Science has not only to create, but also to preserve, and the surest guarantee of progress lies in a clearly discernible line of continuity of thought. There must be no arbitrary and artificial revolutions. The truth of science would be hopelessly surrendered to the whims of fashion, if changes could be introduced without rhyme or reason. The public has a right to know why in the last twenty years the language of economics has been changed beyond recognition, why illuminating truths which were once the pivots of the textbooks have been abandoned, why no more is heard of marginal utility which the creators of the subjective theory of value considered as their great revelation, why simple complementarity of goods like bread and butter requires nowadays excursions into third dimensions, why indeed the whole theory of value has been transmogrified into a tangle of mathematical abstractions which day by day seem to increase in baroque exuberance, and which are rapidly becoming the nightmare of the classroom.

<sup>14</sup> Should the required explanation not be forthcoming, the public has the right to revert without further ado to those simple, clear and valid formulations of the theory of value which are to be found e.g. in that classic treatise bearing —not undeservedly—the title: The Common Sense of Political Economy.

可言) ? ...<sup>15</sup>

雖然 Bernardelli 極度想要挽救邊際效用遞減等觀念的奮鬥，直到現在還是被定論為功敗垂成的無力反擊，但他的努力至少深刻地反映一些經濟學家對必須放棄常識性的經濟概念的做法深深的不解與強力的反彈，以及想拯救 ALEP 互補性定義與邊際效用遞減的概念所投入的長期不歇的努力。<sup>16</sup>

但是現代經濟理論似乎對這個問題無能為力，有些人認為這種不完美性是現代經濟理論的先天本質或宿命，例如 Lancaster (1953)就論斷說：

「...只要古典邊際效用的方法並沒有苦於被現代價值理論所強調的無能或障礙，部分的(古典)經濟理論將是非常精簡的。但是，它真的為這些無能所苦，並且這件事不論 Bernardelli 博士或其他任何人都是無能為力的。(However, it *does* suffer from those disabilities, and there is nothing that Dr. Bernardelli, or anyone else, can do about it.)...」<sup>17</sup>

主張由序數效用的概念重新建構需求理論，第一個重建目標就是討論要以怎樣的新定義來取代舊互補性定義，舊的互補性定義因此變成序數效用革命的頭號戰犯。

但 Hicks-Allen 所提出的定義很不自然，所以連小學生都懂的互補性概念，被搞得很複雜而難懂。最簡單的東西卻變得最難去充分了解。所以 Samuelson (1974)在 Hicks-Allen 需求理論革命 40 週年之時，還主張需要對互補性定義進行再一次而且希望是最後一次的再討論。

<sup>15</sup> It is indispensable that all those who are busily weaving the new garments of economic theory should lay aside the fascinating novel tools of their creation, and pause to reflect as to what they are really doing. In fact, all writers who have been forcing the problems of economics into the straightjacket of preference scales and of marginal rates of substitution, and in particular those authors who lately seem to receive such scales by revelation, are herewith solemnly and legitimately suspended from their labour, until they shall have answered satisfactorily the question: why should anybody be constrained to observe the fancy rule (for which there appears to be no authority whatever) that only properties of the slopes of indifference curves should be used in the formulation of the laws of economics?

<sup>16</sup> Rothbard (1956/1997/2002)以提出另一種邊際效用的定義，試圖解決此問題。另外...以商品是為了滿足慾望(wants)，慾望才是直接影響效用的原因的 ordinal marginal utility，企圖提出解決方式。這些作者通常被歸類為奧地利學派。

<sup>17</sup> It would be very neat for parts of economic theory if only the classical marginal utility approach did not suffer from the disabilities emphasized by the modern value theorists. However, it does suffer from those disabilities, and there is nothing that Dr. Bernardelli, or anyone else, can do about it.

這好像 Samuelson 對於相信舊定義的經濟學家被序數主義者驅離的互補性「應許之地」的經濟學家感到抱歉。對於這些相信簡單心理法則的經濟學家現在只能定居在佈滿礫石的荒涼之地，也失掉了他們的麵包。身為序數效用主義者的大將 Samuelson 覺得有義務挺身而出，帶領大家走一趟千辛萬苦九彎十八拐的崎嶇天險道路，回到被序數主義者驅離的互補性「應許之地」。

### 3. 為何 Samuelson 有義務帶領我們回到被驅離的互補性「應許之地」

Samuelson (1947) 在以其博士論文為根柢改寫而成的名著《經濟分析的基礎》(*The Foundations of Economic Analysis*)書中，於討論互補性問題時說：

在我看來互補性的問題，已受到超過其內在重要性所值得關注的程度。(In my opinion the problem of complementarity has received more attention than is merited by its intrinsic importance.)

但是，正好在 Hicks and Allen (1934)掀起滔天巨浪的序數革命四十年之後，Samuelson (1974)發表了一篇名為〈互補性：關於希克斯-艾倫在需求理論革命 40 週年的一篇論文〉(Complementarity: An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory)的論文，非常刻意地且耿耿於懷地想盡辦法想在維持效用是序數的概念之下，還能夠透過精緻的人工化的支出函數等概念，以間接地回復到 Edgeworth 與 Pareto 所採取的傳統的以總效用二次微分項正負來定義互補品與替代品的概念，以說服傳統理論的支持者或序數效用理論的反對者，序數效用的前提下合理的舊的互補性定義還是有容身之地，只是要透過迂迴不自然的路線才能千辛萬苦地到達目的地。

在該篇知名文章一開頭的地方，Samuelson (1974)就有感而發地說：

時機成熟了，是對互補性的概念做一次新鮮的、現代的觀察的時候了。不管概念內在的優劣是什麼，四十年前它有助於激發 Hicks 和 Allen 執行古典序數需求理論的「重新考慮」(reconsideration)。而且，我希望在此展示，不論是擅長於文字的或數理的經濟學家關於此古老的當務之急的最後一句還沒有被說出來的話。

因此，接著，Samuelson (1974)講出一句後來常被引用的知名的話：

最簡單的東西往往是最複雜去充分了解的。(The simplest things are often the most complicated to understand fully.)

緊接著，Samuelson (1974)在文章說，Edgeworth-Pareto 所採取的傳統互補性定義是：「每個小學生都知道的事(What Every Schoolboy Knows)」：

### 每個小學生都知道的事(What Every Schoolboy Knows)

正如，維根斯坦(Ludwig Wittgenstein)會說，我們「知道」咖啡和茶是「替代品」(substitutes)，因為我們可以喝一種或另一種；以同樣的方式，我們知道，茶和檸檬是「互補品」(complements)，因為檸檬茶構成我們所期望的飲料。大概我們會覺得茶和鹽是介於替代品和互補品兩者之間：相對來說，茶葉和鹽在性質上是「獨立品」。<sup>18</sup>

後來，在討論到 Hicks-Allen 提出的互補品與替代品的定義時，Samuelson (1974)感慨地說，這種定義是連經濟學的博士生都會喊救命：

如果我們想要描述這種新的程序給維根斯坦所教的奧地利學生，他們會驚訝地得知，這種屬於他們的後 Pareto 概念所論述的竟然是這麼一回事。經濟博士生可能流露出同樣的驚愕表情。「什麼？」他們會問，「想要去發現茶和檸檬是互補品，我必須追蹤它們的價格或數量的變化而在貨幣所得或其他一個或一些商品的『補償性』變化？上帝保佑我的靈魂，我從來沒有懷疑過。請問，這是為什麼呢？」<sup>19</sup>

其實，如果你偷聽研究生教室或偷窺中級和高級經濟理論的書籍，你必定在學習為什麼會採取如此的定義方式的原因時遭遇到一些困難。

因此，Samuelson (1974)想盡辦法要在維持效用是序數的概念之下，還能夠間接地以

<sup>18</sup>路德維希·約瑟夫·約翰·維根斯坦(德語：Ludwig Josef Johann Wittgenstein，又譯維根施泰因[1]；1889年4月26日—1951年4月29日)，出生於奧地利，後入英國籍。維根斯坦是20世紀最有影響力的哲學家之一，其研究領域主要在數學哲學、精神哲學和語言哲學等方面。[2]從1939年至1947年，維根斯坦一直在劍橋大學教書。[3]他在生前出版的著作不多，包括有1篇書評，1本兒童辭典，和1本75頁的《邏輯哲學論》(1921年)。

<sup>19</sup> The same astonishment might be registered by most in-laws of economic Ph.D.'s. "What?" they will ask, "to discover that tea and lemon are complements must I accompany any change in their prices or quantities by a 'compensating' change in money income or in some other good or goods? Bless my soul, I'd never have suspected that. Pray, why?"



Edgeworth 與 Pareto 所採取的傳統概念來定義互補性，以彌補 Hicks-Allen 所提出的不恰當的互補性的定義。

在經過長篇的努力之後，我把它形容為走上一趟千辛萬苦九彎十八拐的崎嶇天險道路之後，於文章中 Samuelson 終於高興地說：

現在，我們已經有一個良好穩固的效用度量方式可以來運用了，那些渴望穩固而簡單的互補性測量方式的人可以感覺到又回到了 Pareto 和其他現代序數主義者將其逐出(drive out)的應許之地(the promised land)。而現在，他們已經沒有必要放棄自己想要的麵包並勉強定居於(settle for)由後 Slutsky 作家所提供的複雜的石頭之地。

但是，我認真讀過那一篇艱澀難讀的文章，並沒有被他說服，他還是沒有帶我回到簡單的應許之地。在現代的個體理論中並沒有人採取 Samuelson 複雜的且不自然的救援方式而推出的複雜定義方式，如今還是採取 Hicks-Allen 所提出的怪異定義。<sup>20</sup>

Samuelson (1974)竭盡全力所提供的「應許之地」，並不是原來的信仰者所信仰的原版的「應許之地」，而是序數效用主義經濟學家經過九彎十八拐之後牽強地特意人工化的類似的非正版的「應許之地」。換句話說，Samuelson 在序數革命四十年之後，甚至在其過世之前，還是不能把我們帶回原汁原味或更有道理的「應許之地」。其實，我的研究心得清楚地指向，不放棄 Pareto 與 Hicks and Allen 版本的序數效用理論，也就是不放棄無異曲線的概念，是回不到原先的真正的「應許之地」。

這段歷史讓我們深刻地體驗到為什麼經濟學大師 Samuelson 在面對序數效用理論與正常的互補性定義之間的矛盾性的痛苦掙扎。到底是什麼難以克服的困難，使如此聰慧偉大的經濟學大師花了四十年的時間而不得其解，甚至我們可能可以說，直至其生命終點都不得其解。

其實，不只到了 1974 年，這還是一個重大謎團，並且這個謎團至今還未被成功地破解，正如最近 2014 年發表於經濟史期刊《政治經濟學史》(*History of Political Economy*)的一篇文章，作者 Hudík (2014, p.690)於文章結語中所下的結論：「最近試圖建構…的消

<sup>20</sup>另一系列的文獻，稱為 supermodularity and complementarity 理論的發展，一個重要的導因也是因為現代互補性的缺失所導致的發展。但是，此理論還是一種由總效用出發的理論，由總效用出發的效用理論，總效用的二次微分是基數效用的概念是無法解決的難題。Topkis (1998)是一重要的代表性文獻。

費理論是否會導致重新引入邊際效用於消費行為的分析之中…。截至今天，這個問題仍然是處於等待解答的狀態。」(the question whether recent attempts to construct ... consumer theory will lead to a reintroduction of marginal utility into analyses of consumer behavior... As of today, this question still open.)

更令人納悶的現象是竟然當前很多的經濟學家已不知道經濟學還存在著這樣一個重大的謎團，似乎大家已經將使用具有重大爭議的理論來進行應用分析的現象視為見怪不怪或當成理所當然的事了。

#### 4. 真正回到「應許之地」的經濟模型

試想你踏進一家店裡，發現其中有一項物品勾起你的購買與擁有的慾望，你看了一下價格標籤。這時候，你內心開始揣摩與思考要不要(或值不值得)以那樣的價格加以購買，這時候你會怎麼想呢？若你決定要購買該商品，那麼你可能會進一步思考是否要多買幾單位，這時候你又會怎麼想？

我們假設你會衡量以這個價格購買這項商品是不是值得的呢？換個角度說，會衡量在這項商品上花費這個價格是不是值得的呢？不論是對第一單位、第二單位…都採取這種商品效益與價格成本的比較方式。你會比較這單位商品與價格所各自對應的兩項不同選項的邊際價值對你的相對意義的大小，以決定購買數量。

就在這麼簡單、這麼少的、這麼符合實際的假設下，讓我為你說明如何建構一套假設切合實際人類行為特性的個體選擇行為的新分析架構，以取代被廣泛採用但卻假設不切實際的當前主流的「無異曲線配合預算限制線的分析法」，但卻同時要能展現與保留傳統的互補性定義等合理的經濟直覺。

我們可以應用一些數學符號，來刻畫上述的日常故事的場景。當你走進店裡時擁有財富或所得水準  $M$  元，該商品的單位價格是  $p$  元，若你決定採購  $x$  單位，則在付出  $px$  元的代價後會剩下  $M - px$  元。

你每一次的選擇(每一單位要不要買)所面對的就是「一得」與「一失」之間的取捨，「一得」就是你取得該單位商品對你的意義，「一失」就是你所必須付出的第  $p$  元的價格對你的意義。要在「一得」與「一失」之間進行取捨，其實，你只要知道「一得」與「一

失」對你的相對重要性高低即可，而不需要知道相對重要性或意義高多少。也就是，你只要能夠判斷哪一邊你比較偏好(比較喜歡)或一樣喜歡即可。

因此，如果我們用商品的邊際效用  $\phi_x$  來代表第  $x$  單位商品對你的意義，用價格的效用  $\psi^p$  來代表第  $p$  元的價格對你的意義；並且只要  $\phi_x$  與  $\psi^p$  的相對大小有意義(邊際效用差值的正負有意義，而差值大小不需要有意義)，消費者就可以做出購買決策。這就是一種序數效用的概念。

由以上的說明，消費者對第  $x$  單位的商品與第  $p$  元的價格之間的偏好、(邊際)效用與決策，可由下列關係式加以表示：

$$(5) \quad (x^{th}; other\ things) \succ (p^{th}; other\ things) \Leftrightarrow \phi_x > \psi^p \Leftrightarrow \text{購買},$$

$$(6) \quad (x^{th}; other\ things) \prec (p^{th}; other\ things) \Leftrightarrow \phi_x < \psi^p \Leftrightarrow \text{不買},$$

$$(7) \quad (x^{th}; other\ things) \sim (p^{th}; other\ things) \Leftrightarrow \phi_x = \psi^p \Leftrightarrow \text{無差異(消費者均衡)},$$

其中，當每一單位商品的售價是固定的時候，則其中所有的  $p^{th}$  都是相等的。另外，「*other things*」精確的表達方式是「*other things being equal*」的意思。

當你決定要不要利用第  $p$  元來購買第  $x$  單位時，你等於是在對第  $p$  元價格的錢與第  $x$  單位商品進行偏好排序。

若你對第  $x$  單位商品的偏好程度高於第  $p$  元的偏好程度；以效用來表示，就是你對第  $x$  單位商品的邊際效用  $\phi_x(x; other\ things)$  高於第  $p$  元價格的(邊際)效用  $\psi^p(x; other\ things)$ ，則你會購買。若你對第  $x$  單位商品的偏好程度低於第  $p$  元價格的偏好程度；以效用來表示，就是你對第  $x$  單位商品的邊際效用  $\phi_x(x; other\ things)$  低於第  $p$  元價格的邊際效用  $\psi^p(x; other\ things)$ ，則你不會購買。簡單地說，你會一直購買到你對第  $x$  單位商品的偏好程度剛好等於第  $p$  元價格的偏好程度；以效用來表示，就是你對第  $x$  單位的商品的邊際效用  $\phi_x(x; other\ things)$  剛好等於第  $p$  元價格的(邊際)效用  $\psi^p(x; other\ things)$  的地步。

## 5. 消費者均衡

在此，我們簡單假設商品邊際效用函數與價格效用函數分別是：

$$(8) \quad \phi_x(x; \text{other things}) = \phi_x(x; y); \phi_{xx} < 0, \phi_{xy} \geq 0, \phi_{xi} = 0 \text{ for all } i \neq x, y \text{ variables}$$

$$(9) \quad \psi^p(p; \text{other things}) = \psi^p(p; m = M - px); \psi_p^p > 0, \psi_m^p < 0, \psi_i^p = 0 \text{ for all } i \neq m, p$$

在式(8)商品邊際效用函數中， $\phi_{xp} = 0$ 與 $\phi_{xm} = 0$ 的設定，表示商品價格與所保有現金多寡不會影響商品邊際效用的高低；而 $\phi_{xx} < 0$ 的假設，顯示商品邊際效用遞減的特性。當 $\phi_{xy} > 0$ 則表示 $y$ 為 $x$ 的互補品，當 $\phi_{xy} < 0$ 表示 $y$ 為 $x$ 的替代品，當 $\phi_{xy} = 0$ 表示 $y$ 為 $x$ 的獨立品。

式(9)的價格效用函數中， $\psi_x^p = 0$ 的假定，隱含商品消費數量多寡不會改變價格的效用；而 $\psi_p^p > 0$ 的設定，意味著商品價格愈高價格的效用愈大；而 $\psi_m^p < 0$ 的假設，暗示消費者所保有的現金愈多價格的效用愈低。

假設當你在考慮是否購買某特定單位的商品數量下，若 $\phi_x(x; y) > \psi^p(p; M - px)$ 則會購買此單位並且會繼續考慮增加購買下一單位；若 $\phi_x(x; y) < \psi^p(p; M - px)$ 則不會購買此單位，並且會考慮減少購買數量。也就是，一位財富水準為 $M$ 的消費者的最適購買數量( $x$ )決定於：

$$(10) \quad \phi_x(x; y) = \psi^p(p; M - px); \phi_{xx} < 0, \phi_{xy} \geq 0, \psi_p^p > 0, \psi_m^p < 0,$$

等號左邊 $\phi_x(x; y)$ 商品的邊際效用是「購買或消費第 $x$ 單位商品所獲得的消費邊際效用」，等號右邊 $\psi^p(p; M - px)$ 的價格效用表示「購買第 $x$ 單位商品付出的單位價格 $p$ 元所犧牲的價值」，也就是為購買第 $x$ 單位商品付出邊際成本的意思。因此，這是一種邊際效用等於邊際成本的最適化概念。這一條最適化條件是「交易理論(序數的邊際效用分析法)的基本方程式」(the fundamental equation of the exchange theory)的簡單版本。

換個角度， $\phi_x(x; y) = \psi^p(p; M - px)$ 隱含：

$$(11) \quad \frac{\phi_x(x; y)}{\psi^p(p; M - px)} = 1$$

這表示在消費者均衡時，商品的邊際效用與價格效用的比值恰好等於 1。值得特別關注地，這一條「交易理論(序數的邊際效用分析法)的基本方程式」比分配理論的極大化總效用分析法的「基本方程式」 $U_x(x; y)/U_m(p; M - px) = p$  更具有一般性。在一些特殊的假設下，新的「交易理論序數的邊際效用分析法的基本方程式」才會退化成類似於舊的「分配理論極大化總效用分析法的基本方程式」。

## 6. 需求函數的導出

對式(10)的消費者均衡式，做商品數量  $x$ 、價格  $p$  與所得  $M$  的全微分，可得需求函數為：

$$(12) \quad x = x(p, M, y); \quad x_M > 0, x_p < 0, x_y \geq 0$$

其中，

$$(13) \quad x_M = \frac{\psi_m^p}{\phi_{xx} + p\psi_m^p} > 0$$

$$(14) \quad x_p = \frac{\psi_p^p - x\psi_m^p}{\phi_{xx} + p\psi_m^p} = \frac{\psi_p^p}{\phi_{xx} + p\psi_m^p} - \frac{\psi_m^p}{\phi_{xx} + p\psi_m^p} x < 0$$

$$(15) \quad x_y = -\frac{\phi_{xy}}{\phi_{xx} + p\psi_m^p} \geq 0 \Leftrightarrow \phi_{xy} \leq 0$$

式(13)中所得( $M$ )變動對需求量( $x$ )的結果  $x_M > 0$  表示，人們愈有錢時購買數量愈多，主要原因是因為消費者所保有的現金或財富愈多價格的效用愈低。因為當你愈有錢時，付出相同金錢  $px$  後，所剩餘的錢財  $M - px$  愈多，消費者所保有的現金或財富愈多，購買第  $x$  單位商品的價格的效用  $\psi^p(p; M - px)$  愈低，即付出的相同的價錢所帶來的痛苦感較低，在商品的邊際效用遞減的情況下，因此願意在相同的價格下購買更多的數量。

式(14)中價格( $p$ )變動對需求量( $x$ )的影響  $x_p < 0$  說明，商品價格愈高，消費者購買此商品的數量愈少。價格愈高需求量愈少，就是描述需求法則的負斜率需求線的具體呈

現。兩種同向的負向力量導致負斜率需求線的結果，一是商品價格提高價格的效用愈大，所導致的負向的純粹價格效果；二是商品價格提高，付出的金錢愈多，剩餘的錢財愈少，價格的效用也愈高，即負向的價格變動的所得效果的具體呈現。這兩股力量，都使得商品價格愈高，提高消費的(邊際)成本，而商品的邊際效用維持不變，所以消費者購買此商品的數量愈少。

本文的重點，則出現在式(15)中，商品( $y$ )變動對需求量( $x$ )的結果 $x_y \geq 0$ 。若商品 $y$ 為商品 $x$ 的互補品 $\phi_{xy} > 0$ ，則商品 $y$ 增加會使消費者對商品 $x$ 的需求量提高 $x_y > 0$ ；若商品 $y$ 為商品 $x$ 的替代品 $\phi_{xy} < 0$ ，則商品 $y$ 增加會使消費者對商品 $x$ 的需求量減少 $x_y < 0$ ；若商品 $y$ 為商品 $x$ 的獨立品 $\phi_{xy} = 0$ ，則商品 $y$ 增加不會使消費者對商品 $x$ 的需求量發生變化 $x_y = 0$ 。

但是，你知道且會相信嗎？現在主流的個體經濟學理論正式且嚴謹地強烈主張，你不可以那樣定義互補性與替代性。

為什麼呢？

客氣地說，因為上述一項商品的持有數量增加會提高所關注的商品的邊際效用則稱為互補品的定義，與現代流行的序數總效用理論的核心精神不能相容。序數總效用理論主張效用數值只有總效用的相對大小的次序有意義，總效用差值與比率的相對大小都無意義，所以建立在交叉邊際效用變化率的互補性定義是無意義的概念，是不能登上大雅之堂的不科學的且無意義的概念，是不能在序數效用理論中加以應用的概念。

不客氣地說，「一項商品的持有數量增加會提高所關注的商品的邊際效用則稱為互補品的定義」，是一種錯誤的經濟直覺、是一種錯誤的常識、是一種錯誤思維邏輯下的產物，所以是一種不科學的落伍的標誌，所以不能在現代科學的美好的經濟理論中現身。

現在，我們必須看看新的互補性定義，能不能順利通過序數效用理論效用函數在單調轉換之後定義可維持不變的考驗。

## 7. 單調轉換

序數總效用分析法堅持單調正向轉換不會改變偏好(與行為)的特性，單調正向轉換不會改變消費者行為，但必須犧牲總效用函數二次微分項的經濟意義。現在，新的序數邊際分析方法假設人由邊際效用出發(而非由總效用出發)直接來思考問題，序數邊際效用分析法也堅持單調正向轉換不會改變偏好(與行為)的特性，也維持單調正向轉換不會改變消費者行為。但不同於序數總效用理論的是，新的序數邊際分析方法不需要犧牲邊際效用的一次微分項(等同於序數總效用理論的總效用二次微分項)的經濟意義。證明如下。

對商品邊際效用  $\phi_x(x; y)$  透過單調函數  $F(\cdot)$ ;  $F' > 0$  轉換為  $\Phi_x = F(\phi_x(x; y))$ ；同時對  $p$  元的價格效用  $\psi^p(p; M - px)$  做同樣地單調轉換為  $\Psi^p = F(\psi^p(p; M - px))$ 。即

$$(16) \quad \Phi_x(x; y) = F(\phi_x(x; y)); \quad F' > 0, F'' \geq 0$$

$$(17) \quad \Psi^p(p; m = M - px) = F(\psi^p(p; m = M - px)); \quad F' > 0, F'' \geq 0$$

這隱含：

$$(18) \quad \Phi_{xx}(x; y) = F'\phi_{xx}(x; y)$$

$$(19) \quad \Phi_{xy}(x; y) = F'\phi_{xy}(x; y)$$

$$(20) \quad \Psi_p^p(p; M - px) = F'\psi_p^p(p; M - px)$$

$$(21) \quad \Psi_m^p(p; M - px) = F'\psi_m^p(p; M - px)$$

因此，我們可以獲得  $sign\phi_{ij} = sign\Phi_{ij}$  且  $sign\psi_i^p = sign\Psi_i^p$  的結果，因此邊際效用變化率的正負符號可以維持恆定，所以終於可以取得合理的經濟意義。

非常值得注意地，邊際效用遞減在此模型中是序數效用概念，而非如在極大化總效用理論中是基數效用的代名詞或同義詞。並且，邊際效用的變化方向的傳統互補性定義，現在也是序數效用的概念，而不再是基數效用的代名詞或同義詞。

由上述簡單的分析中，我們發現，傳統合乎簡單心理法則的互補性定義，已經可以

與進步的且合理的序數效用概念共存了，誰說不能採取如此正常的定義？誰說這種直覺定義必須只能擺在經濟學的歷史博物館中？

但是，值得注意地，這不是單純的老定義的復活，而是一種有不同含意的老定義。一是跨界的概念，商品邊際效用與價格效用是來自不同價值觀與偏好排序的關係；二是交叉項不具對稱性，而由總效用出發的理論基本上具有對稱性；三是新理論是由邊際效用直接出發的新思維，而不是由一個總效用函數直接出發的舊思維。由總效用函數出發的理論，會走入胡同，無法成功解決此互補性與邊際效用遞減法則等問題。

也就是，在由總效用出發的思維架構下，又採取邊際效用的變化方向的傳統互補性定義，這在引入序數效用的概念之時，會變成一種互相矛盾的做法。而解決這項矛盾的兩全其美的路徑，不是如 Hicks 和 Allen 等所提議的在直接極大化總效用的理論架構中，放棄正常的舊的互補性定義，而是應該改走另一條路。放棄由總效用出發的理論，而走上林忠正整人所提議的新的跨界的得與失的序數邊際效用分析法的理論大道。

轉換後的消費者均衡要求：

$$(22) \quad F(\phi_x(x; y)) = F(\psi^p(p; M - px))$$

首先，原均衡條件為  $\phi_x(x; y) = \psi^p(p; M - px)$ ，以  $F(\phi_x)$  取代其中的  $\phi_x$ ，以  $F(\psi^p)$  來取代  $\psi^p(p)$ ，可得新的均衡條件  $F(\phi_x) = F(\psi^p)$  一定成立，這道理很簡單，相同的數值經過相同的轉換之後數值當然會維持不動。故單調正向轉換前後的最適條件與最適解不會產生變動。

其次，簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：

$$(23) \quad x_M = \frac{\Psi_m^p}{\Phi_{xx} + p\Psi_m^p} = \frac{F'\psi_m^p}{F'\phi_{xx} + F'p\psi_m^p} = \frac{\psi_m^p}{\phi_{xx} + p\psi_m^p}$$

即與單調轉換前的結果式(13)相同。

另外，價格變動對購買數量的效果為：

$$(24) \quad x_p = \frac{F'\psi_p^p - F'x\psi_m^p}{F'\phi_{xx} + F'p\psi_m^p} = \frac{\psi_p^p - x\psi_m^p}{\phi_{xx} + p\psi_m^p}$$



即與單調轉換前的結果式(14)相同。

並且，對邊際效用函數進行單調正向轉換也不會影響總效果中兩分項的個別效果。因為：

$$(25) \quad \frac{\Psi_p^p}{\Phi_{xx} + p\Psi_m^p} = \frac{F'\psi_p^p}{F'(\phi_{xx} + p\psi_m^p)} = \frac{\psi_p^p}{\phi_{xx} + p\psi_m^p}$$

$$(26) \quad \frac{x\Psi_m^p}{\Phi_{xx} + p\Psi_m^p} = \frac{x F'\psi_m^p}{F'(\phi_{xx} + p\psi_m^p)} = \frac{x\psi_m^p}{\phi_{xx} + p\psi_m^p}$$

最後，簡單地計算可得，所擁有的  $y$  商品數量的變動對  $x$  商品的購買數量的影響為：

$$(27) \quad x_y = -\frac{\Phi_{xy}}{\Phi_{xx} + p\Psi_m^p} = -\frac{F'\phi_{xy}}{F'\phi_{xx} + F'p\psi_m^p} = -\frac{\phi_{xy}}{\phi_{xx} + p\psi_m^p} \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

即與單調轉換前的結果式(15)相同。也就是，若商品  $y$  為商品  $x$  的互補品  $\phi_{xy} > 0$ ，則商品  $y$  增加會使消費者對商品  $x$  的需求量提高  $x_y > 0$ ；若商品  $y$  為商品  $x$  的替代品  $\phi_{xy} < 0$ ，則商品  $y$  增加會使消費者對商品  $x$  的需求量減少  $x_y < 0$ ；若商品  $y$  為商品  $x$  的獨立品  $\phi_{xy} = 0$ ，則商品  $y$  增加不會使消費者對商品  $x$  的需求量發生變化  $x_y = 0$ 。

從而對任何一個相同問題而言，序數總效用分析法都存在總效用二次微分項沒有意義的缺點，在序數邊際效用分析法中這項難題獲得解決。要注意我們的結論是非常具有一般性的，此結論隱含對任何一個相關問題而言，新模型都是比較好的模型。

由這些分析結果，我們發現關於互補性的問題：「簡單就是簡單」。現在，這一切看來很完美。定義正常，很符合直覺；結果正常，也很符合直覺。簡單的問題，現在，終於，可以以很簡單的方式加以完全清清楚楚地理解。

## 8. 消費者均衡與需求函數推導的圖解

【圖 1】圖解消費者均衡的決定過程。在【圖 1】的上圖中，橫軸表示商品  $x$  的數量，縱軸衡量商品的邊際效用與價格效用。其中， $\phi_x(x; y)$  線表示商品的邊際效用， $\psi^p(p; M - px)$  線表示價格  $p$  元的(邊際)效用。

直線  $\phi_x(x; y)$ ，在縱軸( $x=0$ )的截距是  $\phi_x(0; y)$ ，斜率是  $\phi_{xx}(x; y)$ 。在商品的邊際效用遞減  $\phi_{xx} < 0$  的假設下，其斜率為負。為了作圖方便起見，此線畫成直線。另外，直線  $\psi^p(p; M - px)$ ，在縱軸( $x=0$ )的截距  $\psi^p(p; M)$ ，斜率是  $\psi_x^p(p; M - px)$ 。在  $\psi_m^p < 0$  消費者所保有的現金或財富愈多價格的效用愈低的假設下，其斜率為正。為了作圖方便起見，此線也畫成直線。

在【圖 1】的下圖中，橫軸也是表示商品數量多寡的  $x$  值，縱軸表示  $x$  商品價格高低的  $p$  值。

考慮在每單位商品價格  $p$  元時，一位擁有財富或所得水準  $M$  元的消費者的購買行為。當消費者商品需求數量為  $x^a$  時，若消費者對第  $x^a$  單位商品的偏好高於對商品價格  $p$  元的偏好，這等價於商品的邊際效用  $\phi_x(x^a; y)$  高於價格的效用  $\psi^p(p; M - px^a) = a^p$ ，所以  $\phi_x(x; y)$  直線的垂直高度大於  $\psi^p(p; M - px)$  直線的高度(高多少不重要)，此時消費者會購買與消費第  $x^a$  單位商品，並且有動機考慮增加購買數量。相反地，當消費者商品需求數量為  $x^b$  時，若消費者對第  $x^b$  單位商品的偏好低於對商品價格  $p$  元的偏好，這等於是說商品的邊際效用  $\phi_x(x^b; y)$  低於價格的效用  $\psi^p(p; M - px^b) = b^p$ ，所以  $\phi_x(x; y)$  直線的垂直高度小於  $\psi^p(p; M - px)$  直線的高度，此時消費者不會購買與消費第  $x^b$  單位商品，並且有動機考慮減少購買數量。特別值得注意地，當消費者商品需求數量為  $x^*$  時，若消費者對第  $x^*$  單位商品的偏好等於對商品價格  $p$  元的偏好，這等同於商品的邊際效用  $\phi_x(x^*; y)$  等於價格的效用  $\psi^p(p; M - px^*)$ ，所以  $\phi_x(x; y)$  直線的垂直高度等於  $\psi^p(p; M - px)$  直線的高度，此時消費者買不買此  $x^*$  邊際單位商品，對她來說沒有差異(我們假設消費者會購買此單位的商品)，並且消費者有動機不再增減其購買數量。此時，消費者達到均衡，即(除非出現多重解的狀況)均衡出現在上圖中兩線交點  $e^*$  上，將此均衡點所對應的價格  $p$  與數量  $x^*$  畫在下圖中就是均衡點  $E^*$ 。 $E^*$  所對應的商品數量，就是消費者的一個最佳的需求數量。

在【圖 2】的上圖中，因為價格上漲對  $\phi_x(x; y)$  沒有影響，這表示當價格由  $p$  上漲至  $\hat{p}$  時， $\phi_x(x; y)$  直線不動。另外，當價格由  $p$  上漲至  $\hat{p}$  時，圖中  $\psi^p(p; M - px)$  線往上移至  $\psi^{\hat{p}}(\hat{p}; M - \hat{p}x)$  線的位置。新均衡出現在上圖兩線的新交點  $\hat{e}^*$  上，此均衡點所對應的價格  $\hat{p}$  與數量  $\hat{x}^*$  是下圖中的均衡點  $\hat{E}^*$ ，連接  $E^*$  與  $\hat{E}^*$  可畫出負斜率的個人需求線  $x^d = x^d(p, M, y)$ 。

接著，我們就可以分析互補品、替代品與獨立品的數量變動，對商品  $x$  的購買數量的影響。

首先，在【圖 3】中，當商品  $y$  為商品  $x$  的互補品  $\phi_{xy} > 0$ ，商品  $y$  增加會使商品  $x$  的邊際效用  $\phi_x(x; y)$  線往右移動，這造成個人需求線  $x^d = x^d(p, M, y)$  也往右移動，在相同的價格下使消費者對商品  $x$  的需求量提高  $x_y > 0$ 。其次，在【圖 4】中，當商品  $y$  為商品  $x$  的替代品  $\phi_{xy} < 0$ ，商品  $y$  增加會使商品  $x$  的邊際效用  $\phi_x(x; y)$  線往左移動，這造成個人需求線  $x^d = x^d(p, M, y)$  也往左移動，在相同的價格下使消費者對商品  $x$  的需求量減少  $x_y < 0$ 。最後，在【圖 5】中，當商品  $y$  為商品  $x$  的獨立品  $\phi_{xy} = 0$ ，商品  $y$  增加時商品  $x$  的邊際效用  $\phi_x(x; y)$  線維持不動，個人需求線  $x^d = x^d(p, M, y)$  也維持不動，則商品  $y$  增加不會使消費者對商品  $x$  的需求量發生變化  $x_y = 0$ 。

## 9. 結語：真正回到應許之地

在 1930 年代，Edgeworth-Pareto 的互補性傳統定義與 Pareto 深具說服力的序數效用的概念不能並存的發現，激發 Hicks and Allen (1934) 展開影響深遠的改變經濟學個體選擇理論發展軌跡的需求理論重建任務。Samuelson (1974) 一位堅定的序數效用主義者，因為他在 1938 年發表的一篇研究心得發現序數效用的對手理論——基數效用理論，在真實世界中出現的機率是「無窮地不可能的」(infinitely impossible)。但是，雖然 Samuelson 身為一位序數效用主義者，卻無法認同 Hicks and Allen (1934) 所提出的替代性與互補性的序數效用主義者的定義，或許可以說，Hicks and Allen (1934) 的替代性與互補性定義一直令他感到不安。

從而在 Hicks and Allen 所掀起滔天巨浪的序數革命正好四十年之後，Samuelson (1974) 發表了一篇名為〈互補性：關於希克斯-艾倫在需求理論革命 40 週年的一篇論文〉(Complementarity: An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory)，非常刻意地耿耿於懷地，想盡辦法想在維持效用是序數的概念之下，還能夠間接地以 Edgeworth 與 Pareto 所採取的傳統的以總效用二次微分項正負來定義互補品與替代品的概念，以帶領傳統理論的支持者或序數效用理論的反對者回到自然所許諾的，但卻被 Pareto 和 Samuelson 這些現代序數主義者將其驅逐而出的，自自然然的互補性的「應許之地」。

但 Samuelson 的努力顯然沒有改變僵局，我們還是回不到自自然然的互補性的「應許之地」。最簡單的東西仍然是最複雜去充分了解的。

這篇文章的目的，要用林忠正所率先提議發展的「跨界的得與失的序數邊際效用分析法」展示「最簡單的東西應該是最容易去充分了解的」的正常直覺，以及如何平平順順地合情合理且心安理得地踏上返回自自然然的互補性的「應許之地」。

現在，我們真正可以回到應許之地。

並且，或許，我們可以更有信心的大膽地冒險宣稱：我們真的首次提出一套真正完成序數效用革命的新理論了。

現在，我們終於可以放鬆地說：最簡單的事應該可以以最簡單的方式加以完全理解。

再說一次，我們終於可以安穩地回到與平安地定居於互補性的「應許之地」了。

## Reference

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(1)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(2)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色：難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(3)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(I)：效用極大化的 Marshall 模型與無意義的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(4)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(II)：Marshall 的「邊際需求價格」模型與古典效用可衡量概念的意義〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(5)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為 Marshall 需求理論編寫一冊返回經濟學舞台的劇本：比較商品效用與價格效用的邊際摸索決策方式的 Marshall 模型〉，跨界得與失的序數邊際效用

分析法(6)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法：完成序數效用革命理論的誕生〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(7)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈經濟學新的跨界十字交叉(A New Cross-Cross)圖形：取代無異曲線圖示的跨界序數邊際效用分析法的新圖示〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(8)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數效用革命的頭號戰犯：序數主義者眼中邏輯謬誤的常識性邊際效用互補性定義〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(9)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為什麼我們需要一個純正的立基心理法則的序數互補性理論？：難覓古典的 ALEP 互補性定義的完美分身〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(10)，研討論文。

邢慕寰譯，(1967)，《價值與資本》(*Value and Capital*)，台北市：台灣銀行經濟研究室。

邢慕寰譯，(1967)，《需求理論的修正》(*A Revision of Demand Theory*)，台北市：台灣銀行經濟研究室。

Allen, R.G.D. (1934a) "A Comparison between Different Definitions of Complementary and Competitive Goods," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 2:2, pp. 168-175.

Allen, R.G.D. (1934b) "Nachfragefunktionen für Güter mit korreliertem Nutzen." *Zeitschrift für Nationalökonomie*. 5:4, pp. 486-506.

Bernardelli, H. (1938) "The End of the Marginal Utility Theory?," *Economica*, 5:18, pp. 192-212.

Bernardelli, H. (1952) "A Rehabilitation of the Classical Theory of Marginal Utility," *Economica*, 19:75, pp. 254-268.

Hicks, J.R. (1939) *Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*, Oxford: Clarendon Press.

Hicks, J.R. (1956) *A Revision of Demand Theory*, Oxford: Clarendon Press.

Hicks, J.R. and R.G.D. Allen (1934) "A Reconsideration of the Theory of Value," *Economica*, NS, 1: 52-76, 196-219.

- Hudík, M. (2014) “Reference-Dependence and Marginal Utility: Alt, Samuelson, and Bernardelli,” *History of Political Economy*, 46:4, pp. 677-693.
- Lancaster, K. (1953) “A Refutation of Mr. Bernardelli,” *Economica*, 19, pp. 259–262.
- Rothbard, M. (1956) “Toward a Reconstruction of Utility and Welfare Economics,” in Mary Sennholz ed. (Princeton, N.J: D. Van Nostrand, 1956), reprinted in *The Logic of Action One: Method, Money, and the Austrian School* by Murray N. Rothbard (London: Edward Elgar, 1997, pp. 211-255. Mises.org’s online edition copyright.
- Samuelson, P.A. (1938) “The Numerical Representation of Ordered Classifications and the Concept of Utility,” *Review of Economic Studies*, 6, pp. 65–70.
- Samuelson P.A. (1939) “The End of Marginal Utility: A Note on Dr. Bernardelli’s Article,” *Economica*, pp. 86-87.
- Samuelson, P.A. (1947/1983) *Foundations of Economic Analysis*, Harvard Economic Studies, Vol. 80, Enlarged Edition.
- Samuelson, P.A. (1974) “Complementarity: An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory,” *Journal of Economic Literature*, pp. 1255-1289.
- Silberberg, E. (1978) *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, McGraw-Hill.
- Sowell, T. (2009) *Intellectuals and Society*, Basic Books.
- Topkis, D.M. (1998) *Supermodularity and Complementarity*, Princeton University Press.













