

為什麼我們需要一個純正的立基心理法則的序數互補性理論？

難覓古典的 ALEP 互補性定義的完美分身

林忠正*

中央研究院經濟所研究員
國立政治大學財政系教授
國立交通大學經營管理研究所教授
台北市南港區(115-41)研究院路2段128號
中央研究院經濟所
電話: 886-2-2782-2791 轉 507
電子信箱: cclin@econ.sinica.edu.tw

開始撰稿-2015年11月3日

完稿時間-2015年12月31日

列印時間-2016年2月3日



*謝謝林曉珮助理非常有效率的協助，也很謝謝政大財政所江若妘同學的細心校稿。

為什麼我們需要一個純正的立基心理法則的序數互補性理論？

難覓古典的 ALEP 互補性定義的完美分身

[摘要] 在序數效用革命之前，當時經濟學家採用交叉邊際效用正負來定義互補品與替代品，若交叉邊際效用為正就是互補品、為負就稱為替代品、為零則稱為獨立品。此定義為 Auspitz 與 Lieben 率先提出，而知名的學者 Edgeworth 與 Pareto 也採用此定義。但在 Pareto 發起而由 Hicks and Allen 發揚光大的序數效用之後，情勢發生劇變。Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto (ALEP) 互補性定義，因不能與序數的效用不可測性的概念和平共存，而被擺進個體經濟學的歷史博物館之中。那用什麼來替代呢？本文分析另一種可能的互補性定義：「若一個商品增加會提高另一商品的需求量是互補品」。在總效用極大化的序列決策模型之下，探討這是不是一個不會導致錯誤解讀消費者行為的好定義，而可以完美地取代「ALEP 互補性定義」？答案是：不是的。「ALEP 互補性定義」還是有其無法被取代的地位。我們真正需要的是一個能容納「ALEP 互補性定義」的兩全其美的序數效用理論，而不是一個排斥「ALEP 互補性定義」的半吊子的序數效用理論。

JEL 分類: B120, B130, B210, D010

關鍵詞: 序數、基數、邊際效用、互補

…舊的 Edgeworth-Pareto 的互補性定義…有一個完美的簡單的心理意義。當它似乎不適合數學效用分析的傳統分析工具時，不是貿然得出結論認為它是「毫無意義的」(senseless)，反而應該已得出某人的方法是錯的結論。¹

—Bernardelli (1938)

科學不僅僅是要創造，而且還要保存，並且最可靠保證的進步在於思想具有連續性的清晰可辨路線。必須沒有武斷和人為革命。如果變化可以無緣無故地被引入，科學的真理只能無望地自首或屈服於流行的幻想。公眾有權利知道為什麼在過去二十多年裡經濟學的语言已經被改得面目全非(變得無法辨認)，為什麼曾經是教科書的支點或軸心的光亮耀眼的真理已經被拋棄，為什麼再也聽不到主觀價值理論的創造者認為給予他們很大啟示的邊際效用概念，為什麼簡單的互補性商品像麵包和奶油，現今要求第三個維度(存在第三種物品)，為什麼價值理論整體確實已經變形為數學抽象的混亂，混亂似乎以巴洛克式的繁榮逐日增加，並且正迅速成為課堂上的噩夢。

—Bernardelli (1938)

¹ By means of this simple alteration we have thus succeeded in re-establishing the old Edgeworth-Pareto definition of complementarity. This result should not come as a surprise; the old definition had a perfectly straightforward psychological meaning. Instead of rashly concluding that it was “senseless” when it did not seem to fit into the traditional apparatus of mathematical utility analysis one rather should have concluded that one's methods were at fault.

1. 序數效用革命與互補性的定義

序數效用革命之前，經濟學家利用交叉邊際效用正負來定義互補性，若總效用的二次微分項(或交叉邊際效用)為正就是互補品、為負就稱為替代品、為零則稱為獨立品。在經濟文獻中，此項定義為 Auspitz 與 Lieben 率先提出，Edgeworth 與 Pareto 也採取此種互補性定義。

但在由 Pareto 發起而 Hicks and Allen 發揚光大的序數效用之後，情勢發生重大變化。Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto (ALEP)互補性定義，因不能與序數的效用不可測性概念和平共存，而被擺進個體經濟學的歷史博物館之中。

這是為什麼呢？

簡單地說，其根本癥結是因為序數效用的基本精神是任何大小次序相同的數列都可以合格地表述相同的偏好關係。其中，一個數學上的明確含意是：一個合格的序數效用函數在經過任何正向的單調轉換之後，所獲得的新效用函數也是一樣可以用來代表相同的偏好關係。但是，單調轉換前後同樣合格的不同總效用函數，所對應的交叉邊際效用，有一些是正值、有一些是負值、而有一些是零。因此，序數總效用與 ALEP 互補性定義是天生無法共生的概念，而必須尋找新的互補性定義。²

那應該用怎樣的新定義來加以取代呢？Hicks and Allen (1934)提議以建立在無異曲線斜率的邊際替代率的衍生概念來替代。無異曲線是 Hicks and Allen 致力於需求理論重建的啟發性概念，也是他們重建需求理論的神奇的法寶。所以，雖然無異曲線其實是一種非常人工化的加工產物，但他們會想要藉由無異曲線的邊際替代率來建立新的互補性定義，一點都不會令人感到訝異。事實上，邊際替代率是序數效用理論核心中的核心。

然而，我想一位有一點點思考力而不是只會跟著邊際替代率分析法做修改模型輔助假設再推導一次的經濟學家，腦海中第一個浮起的可用來取代舊的互補性的概念應該有所不同。我認為會是以下的定義：若一個商品增加會提高另一商品的需求量，此時數量增加的商品可稱為所關注商品的互補品。同理，一項商品的持有數量增加會降低所關注商品的需求量，則數量增加的商品可稱為所關注商品的替代品。同樣地，一項商品的持

² 這有些「天下本無事，庸人自擾之」的味道。

有數量增加不會影響所關注商品的需求量，則數量增加的商品可稱為所關注商品的獨立品。

這個定義似乎是最接近原先的 ALEP 互補性定義是：「一項商品的持有數量增加會提高所關注商品的邊際效用，此時數量增加的商品可稱為所關注商品的互補品。同理，一項商品的持有數量增加會降低所關注商品的邊際效用，則數量增加的商品可稱為所關注商品的替代品。同樣地，一項商品的持有數量增加不會影響所關注商品的邊際效用，則數量增加的商品可稱為所關注商品的獨立品。」

但是，序數效用主義者會做出這樣的選擇嗎？答案是：不可以的。

這是因為 Hicks 與 Samuelson 這些序數效用主義者，腦海中與論文裡所堅持採用的模型是一種同時決策的模型(也就是在有意或無意中他們同時也是一般均衡主義者)。例如，關於兩種商品如 x 與 y 的購買數量，消費者是在同一次決策中同時決定兩者的購買數量。兩種商品如 x 與 y 的購買數量都是模型內同時一次決定的內生變數，我們不可以有一個(內生變數)商品 y 的持有數量增加會對另一種(內生變數)商品 x 的購買數量造成怎樣的影響的想法。因為 $x_y = \partial x / \partial y$ 的運算概念，此時在數學上是錯誤的概念。一個內生變數不可以作為自變數來對另一個內生變數進行微分的運算。是故，看來最佳且最自然的「若一個商品增加會提高另一種所關注的商品的需求量，則稱此數量增加的商品為所關注商品的互補品」的定義，也無緣進入經濟學的舞臺以取代「ALEP 互補性定義」退出經濟學舞臺所留下的角色。

現在，我們先擺脫邊際替代率與一般均衡的緊箍咒，以序列決策而不是一次決策的方式來思考問題，我們每天常常做出至少上百個決策，採取序列決策而不是一次性決策是不爭的事實。

現在我們就來分析看看，在總效用極大化的序列決策的模型之下，「若一個商品增加會提高另一商品的需求量則是互補品的定義」是不是一個不會導致錯誤解釋消費者行為的好定義，而可以完美地取代「ALEP 互補性定義」？

我的研究心得的答案是：不是的。「ALEP 互補性定義」的心理法則還是有其無法被取代的地位。我們真正需要的是一個能容納「ALEP 互補性定義」的兩全其美的序數效用理論，而不是一個排斥「ALEP 互補性定義」的半吊子的序數效用理論。

2. 序列決策下 Slutsky-Hicks 極大化序數總效用模型

我們接著就應用一個正式的序列決策下 Slutsky-Hicks 極大化序數總效用模型，清楚明確地呈現這項論述。所謂序列決策模型與一次性決策模型的差異，在此只討論一種商品的購買行為的情況之下，其唯一差異就是前者保留現金是消費者選擇的一個選項，而後者現金只是消費者所擁有的一筆預算不會直接暫時性地帶給他任何效用。

假設有一位消費者對商品與現金的偏好，可以用 $U(x, m) = u(x) + v(m)$ 的可分離相加效用函數來加以刻劃，其中 $U_x = u_x(x) > 0$ 、 $U_{xx} = u_{xx}(x) < 0$ 、 $U_m = v_m(m) > 0$ 、 $U_{mm} = v_{mm}(m) < 0$ 、 $U_{xm} = 0$ 。也就是這位消費者內心感受到的偏好關係呈現出以下的性質：商品與貨幣的邊際效用都為正值，但兩種商品的邊際效用都是遞減，並且兩種商品的效用不會互相影響。

接著如果有人送他一些 y 商品，然後他的心裡所體認到的偏好關係，可以這樣的 $U(x, m, y) = u(x, y) + v(m)$ 可分離相加的效用函數加以真確描繪。也就是消費者的內心感受是， y 商品會影響他對 x 商品的觀感，但不會影響他對錢的感受。

此時，若我們分析消費者從沒有 y 商品變成有 y 商品(或所擁有的 y 商品數量增加)，會怎樣改變消費者購買 x 商品與持有現金(暫時儲蓄)的行為。這看來採用可以捕捉到此消費者內心感受的效用函數 $U(x, m, y) = u(x, y) + v(m)$ 來進行分析這種消費者的內在心理思維歷程與外在行為，應該是非常正常與非常正當的研究切入角度與模型設計。但是，非常令人驚訝地，我們緊接著要明確地證明，這一看來很正常的觀點，在現代序數效用的主流理論裡是有嚴重問題的錯誤想法。

我們就著手進行分析，以清楚呈現這項說法。

在效用極大化模型中，一位擁有財富或所得水準 M 元的消費者，在面對單位價格是 p 元的 x 商品，以及另一種商品的數量 y 之下，他的購買 x 商品的決策或思維方式被設定如下：

$$(1) \quad \max_{x, m} U(x, m, y) = u(x, y) + v(m); U_x > 0, U_m > 0, U_y > 0, U_{xy} \geq 0, \text{ s.t. } px + m = M$$

將預算限制式 $m = M - px$ ，代入效用函數中，模型變成：

$$(2) \quad \max_x U(x, M - px, y) = u(x, y) + v(M - px), \quad m = M - px$$

令 $A \equiv U(x, M - px, y) = u(x, y) + v(M - px)$ ，接著一階條件可表示為：

$$(3) \quad A_x = U_x - pU_m = u_x - pv_m = 0 \quad \text{或} \quad \frac{U_x}{U_m} = \frac{u_x}{v_m} = p$$

具有內部解時，因 $U_{xm} = U_{mx}$ ，二階條件要求：

$$(4) \quad A_{xx} = U_{xx} - 2pU_{xm} + p^2U_{mm} < 0$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：

$$(5) \quad x_M = \frac{U_{xm} - pU_{mm}}{-A_{xx}} = \frac{pU_{mm}}{A_{xx}} = \frac{pv_{mm}}{A_{xx}} > 0$$

若 $x_M > 0$ ，則通稱此商品為從所得角度來看的正常品。通常所得提高對商品的需求數量的影響可增可減，而此結果只出現增加的特定現象，這是因為在所得與另一選項的 x 商品數量，被假定為具有在效用函數上是可分離相加的特性，所獲得的特定結果。

價格變動對購買數量的效果為：

$$(6) \quad x_p = \frac{U_m}{A_{xx}} + \frac{x(U_{xm} - pU_{mm})}{A_{xx}} = \frac{U_m}{A_{xx}} - \frac{pU_{mm}}{A_{xx}} x = \frac{v_m}{A_{xx}} - \frac{pv_{mm}}{A_{xx}} x < 0$$

若 $x_p < 0$ ，則通稱此商品為從價格角度來看的正常品(一般財)，因為價格愈高需求量愈低，符合正常的負向的「需求法則」的概念。此分析結果顯示，價格變動對需求量的影響可以分成等號右邊的兩個效果：第一項是負的替代效果，第二項是價格的所得效果，在可分離相加的特殊效用函數的設定下，此時所得效果為負。因此，我們可以獲得總效果 $x_p < 0$ 為負的結果。

另一種商品數量 y 變動對身為決策變數的商品 x 的購買數量的影響效果為：

$$(7) \quad x_y = \frac{U_{xy} - pU_{my}}{-A_{xx}} = \frac{U_{xy}}{-A_{xx}} = \frac{u_{xy}}{-A_{xx}} \geq 0; \quad u_{xy} \geq 0$$

首先，若 $u_{xy} > 0$ ，早期的經濟學家 Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto 稱此兩商品彼此為互補品；則 $x_y > 0$ ，即商品 y 數量增加會刺激消費者提高對互補商品 x 的購買數量。其次，

若 $u_{xy} < 0$ ，早期的經濟學家稱此兩商品彼此為替代品；則 $x_y < 0$ ，即商品 y 數量增加會刺激消費者減少對替代商品 x 的購買數量。最後，若 $u_{xy} = 0$ ，早期的經濟學家稱此兩商品彼此為獨立品；則 $x_y = 0$ ，即商品 y 數量增加不會使消費者改變對獨立性商品 x 的購買數量。

這分析結果， $sign(x_y) = sign(u_{xy})$ ，看起來既自然又合理，一切似乎很完美無瑕。

但是序數總效用概念的出現，使上述完美無瑕的結果頓時變成一場空歡喜、變成一場幻想。關鍵原因，就在 ALEP 互補品定義與序數總效用的效用數值只能排序的核心概念是互相衝突的概念。序數效用理論的特性要求我們不能對總效用的二次微分項 U_{xy} 和 U_{my} 的正負符號進行任何經濟意義的解釋，因為這些二次微分項的正負符號不能維持恆定不變。你因此不得不放棄這些符號的意義，否則(如果你如此做)就表示你觀念不清，除非你宣稱你採取並支持效用是可衡量的「無窮地不可能的」基數效用理論的分析法。很快地，我們會解釋這背後的原因。

3. 序數效用與單調轉換的概念

序數效用的核心精神是效用數值只有相對大小有意義。一個序數效用函數經過任何正向單調轉換(monotonic transformation)後所對應的新函數還是可以維持或表示原來的偏好次序。序數效用數值大小只有排序大小的意義，這是一種很好的效用概念。但正向單調轉換前後的效用函數此時各自所對應的總效用的二次導數(二次微分項)的正負符號可能不同，所以在序數效用理論的架構中不能容許建立在邊際效用的變化方向(純粹與交叉總效用二次微分項正負)的概念有任何發揮空間。

以數學式子進行分析，可以一般化地呈現這論述的基本精神，我們以下的方程式呈現單調轉換的基本精神：

$$(8) \quad V(x, m, y) = F(U(x, m, y)); \quad F' > 0, F'' \geq 0$$

這表示原先的總效用函數 $U(x, m, y)$ ，進行 $F(U)$ 的正向單調轉換後，所得到的新總效用函數為 $V(x, m, y)$ ，正向單調轉換的特性反映在轉換函數 $F(U)$ 的一階導數 $F'(U) > 0$ 的特性上；而二次微分項可正可負，即 $F''(U) \geq 0$ 。因為單調正向轉換前後的總效用數列數據的大小次序相同， $U(x, m, y)$ 與 $V(x, m, y)$ 代表相同的偏好，滿足這樣性質的效用函數

有無窮多個。

對總效用 $U(x, m, y) = u(x, y) + v(m)$ 進行正向單調轉換使它變成 $V(x, m, y)$ 之後，會衍生出以下的關係式：

$$(9) \quad V_x = F'U_x = F'u_x, \quad V_m = F'U_m = F'v_m$$

$$(10) \quad V_{xx} = F'U_{xx} + F''U_x U_x = F'u_{xx} + F''u_x u_x, \quad V_{mm} = F'U_{mm} + F''U_m U_m = F'v_{mm} + F''v_m v_m$$

$$(11) \quad V_{xm} = F'U_{xm} + F''U_x U_m = F''u_x v_m, \quad V_{xy} = F'U_{xy} + F''U_x U_y = F'u_{xy} + F''u_x u_y$$

$$V_{my} = F'U_{my} + F''U_m U_y = F''v_m u_y$$

因為 $F'' \geq 0$ 皆可，所以我們可以獲得 $signV_{xx} \neq signU_{xx}$ 、 $signV_{mm} \neq signU_{mm}$ 、 $signV_{xy} \neq signU_{xy}$ 等結果。即正向單調轉換前後的總效用函數，所對應的二階導數的正負符號可能不同。因此必須放棄總效用的二次微分項的數值正負所直接與間接衍生的經濟意義，否則就必須放棄序數效用的概念。

在本文中，值得特別強調的是， $signV_{xy} \neq signU_{xy}$ 的結果，這顯示現代序數效用理論不能採取或排斥由心理層面出發的 ALEP 互補品定義的關鍵原因。或者，更精確地且嚴謹地說，現代序數的 Slutsky-Hicks 個體選擇分析架構沒有提供「ALEP 互補品定義」任何一寸的容身之地。

因此，「ALEP 互補品定義」與序數效用概念是天敵，彼此毫無共存共榮的機會。我們因此面對尖銳的兩難而必須進行痛苦的取捨，不是必須放棄 ALEP 互補品定義，就必須放棄序數效用的核心概念。

由於如何克服明顯不合理的效用可測量性的老難題，長久以來一直是經濟學家百思不得其解的大困難，序數效用概念提供如何對抗效用可衡量的「惡魔」的艱困難題一帖靈藥。因此，對很多經濟學家來說，應該不計代價趕快採用，所以舊的正常的符合常識的互補性定義只好犧牲自己以成就大我。

我們接著就實際運作一次極大化序數總效用的模型，明確而深刻地體會這一不能並存的論述背後的推理邏輯。

4. 單調轉換後的消費模型

正向單調轉換後的序列決策的 Slutsky-Hicks 效用極大化消費模型變成：

$$(12) \quad \max_{x,m} V(x,m,y) = F(U(x,m,y)); \quad F' > 0, \quad s.t. \quad px + m = M$$

將預算限制式 $m = M - px$ ，代入效用函數中，模型變成：

$$(13) \quad \max_x V(x, M - px, y) = F(U(x, M - px, y)); \quad F' > 0$$

令 $B \equiv V(x, M - px, y)$ ，最適化的一階條件可表示為：

$$(14) \quad B_x = V_x(x, M - px, y) - pV_m(x, M - px, y) = 0 \quad \text{或} \quad \frac{V_x(x, M - px, y)}{V_m(x, M - px, y)} = p$$

內部解的二階條件要求 ($V_{xm} = V_{mx}$)：

$$(15) \quad B_{xx} = V_{xx} - 2pV_{xm} + p^2V_{mm} < 0$$

簡單的計算可得所得變動對購買數量的效果為：

$$(16) \quad x_M = \frac{V_{xm} - pV_{mm}}{-B_{xx}}$$

若 $x_M > 0$ ，則通稱此商品為從所得角度來看的正常品(一般財)；若 $x_M < 0$ ，則通稱此商品為從所得角度來看的劣等品。乍看之下， $x_M \gtrless 0$ ，都可能成立，此分析結果與單調轉換前的比較靜態分析結果看起來好像不同。但其實不然，在單調轉換前的效用函數具有可分離相加的性質之下，我們等會兒會加以證明，單調轉換後的比較靜態分析結果一定也會是 $x_M > 0$ 。

價格變動對購買數量的效果為：

$$(17) \quad x_p = \frac{V_m}{B_{xx}} + \frac{x(V_{xm} - pV_{mm})}{B_{xx}}$$

若 $x_p < 0$ ，則通稱此商品為從價格角度來看的正常品，因為價格愈高需求量愈低，符合正常的負向的「需求法則」的概念。若 $x_p > 0$ ，則通稱此商品為從價格角度來看是一種

不正常的商品；因為此商品的需求曲線為正斜率，價格愈高需求量愈大，不符合正常的負向的「需求法則」的概念。此商品可能被稱為是季芬財的劣等品。此方程式的分析結果顯示，價格變動對需求量的影響可以分成等號右邊的二個效果：第一項是負的替代效果，而第二項是可正可負的所得效果。

因此，乍看之下， $x_p \geq 0$ ，都可能成立，此分析結果與單調轉換前的比較靜態分析結果不同。但，其實不然，在單調轉換前的效用函數具有可分離相加的性質之下，我們稍後會提供證明，單調轉換後的比較靜態分析結果一定也會是 $x_p < 0$ 。

另一種商品數量 y 變動對身為決策變數的商品 x 的購買數量的影響效果為：

$$(18) \quad x_y = \frac{V_{xy} - pV_{my}}{-B_{xx}} \underset{\leq 0}{\geq} 0; \quad \text{sign}(x_y) = \text{sign}(V_{xy} - pV_{my}) \underset{\leq 0}{\geq} 0$$

首先，若 $\text{sign}(V_{xy} - pV_{my}) > 0$ ，商品 y 的數量增加會使消費者的一階條件由等於零 $B_x = V_x - pV_m = 0$ 變成大於零 $B_x = V_x - pV_m > 0$ ，或邊際替代率由等於價格 $V_x/V_m = p$ 變成大於價格 $V_x/V_m > p$ ；則商品 y 的數量增加會刺激消費者提高對商品 x 的購買數量，即 $x_y > 0$ 。其次，若 $\text{sign}(V_{xy} - pV_{my}) < 0$ ，商品 y 的數量增加會使消費者的一階條件由等於零 $B_x = V_x - pV_m = 0$ 變成小於零 $B_x = V_x - pV_m < 0$ ，或邊際替代率由等於價格 $V_x/V_m = p$ 變成小於價格 $V_x/V_m < p$ ；則商品 y 的數量增加會刺激消費者減少對商品 x 的購買數量，即 $x_y < 0$ 。最後，若 $\text{sign}(V_{xy} - pV_{my}) = 0$ ，商品 y 的數量增加會使消費者的一階條件等於零 $B_x = V_x - pV_m = 0$ 維持不變，或邊際替代率等於價格 $V_x/V_m = p$ 維持不變；則商品 y 的數量增加不會使消費者對商品 x 的購買數量產生任何變化，即 $x_y = 0$ 。

接著，我們如果要對此分析結果進行進一步的經濟意義上的解釋，以獲得更豐富的分析結論，那麼，很自然的反應是，我們應該要對 $\text{sign}(V_{xy})$ 與 $\text{sign}(V_{my})$ 的經濟意義做個別的詮釋，以進行更細緻與豐富的說明。

但是，要小心，這樣做是會出大問題的。因為在序數效用理論中，理論的特性要求我們不能對總效用的二次微分項 U_{xy} 和 U_{my} 的正負符號進行經濟意義的解釋，否則(如果你如此做)就表示你沒有被告知序數效用理論的基本特性，除非你宣稱你所採取的效用概念是效用可衡量的基數效用理論的分析法，但效用可衡量性是一個非常強烈地不可能的特性。

我們接著證明與說明，為何很多經濟學家會支持序數效用理論的原因，即使放棄總

效用的二次微分項 U_{xy} 和 U_{my} 的正負符號的經濟意義解釋權，都在所不惜，甚至還認為這種割捨立基於心理法則觀念的做法是一種進步科學的象徵，而不是一種理論瑕疵的意義。

5. 證明單調正向轉換前後的分析結果一樣

首先，由單調正向轉換前的最適化一階條件 $A_x = U_x - pU_m = 0$ 與轉換後的條件 $B_x = V_x - pV_m = 0$ 完全相同，因為：

$$(19) \quad \frac{V_x}{V_m} = \frac{F'U_x}{F'U_m} = \frac{U_x}{U_m} = p$$

這表示，單調正向遞增轉換後消費者的最適化條件不變，因此最適解的數值不變。

其次，比較單調正向轉換前後兩個模型的比較靜態分析結果，我們發現兩模型的分析結果的外表(數學符號)長得不一樣，但是由無異曲線分析法的基本特性來看，單調正向轉換前後的效用函數表示相同的偏好，所獲得的分析結果(總結果)應該一樣才對。所以，我們應該可以證明單調正向轉換前後兩個模型比較靜態分析的總效果或最後的結果會完全相同。

這證明過程非常簡單，我們的確可以證得它們各自兩兩相等的結果，即：

$$(20) \quad x_M = \frac{V_{xm} - pV_{mm}}{-B_{xx}} = \frac{U_{xm} - pU_{mm}}{-A_{xx}} = \frac{pv_{mm}}{A_{xx}}$$

$$(21) \quad x_p = \frac{V_m}{B_{xx}} + \frac{x(V_{xm} - pV_{mm})}{B_{xx}} = \frac{U_m}{A_{xx}} + \frac{x(U_{xm} - pU_{mm})}{A_{xx}} = \frac{v_m}{A_{xx}} - \frac{pv_{mm}}{A_{xx}} x$$

$$(22) \quad x_y = \frac{V_{xy} - pV_{my}}{-B_{xx}} = \frac{U_{xy} - pU_{my}}{-A_{xx}} = \frac{u_{xy}}{-A_{xx}}$$

其中， $B_{xx} = F'(U_{xx} - pU_{xm} - pU_{mx} + p^2U_{mm}) = F'A_{xx}$ 。

因此我們藉由數學證明發現總效用函數經過單調正向轉換後，不會影響消費者的均衡條件，也不會影響比較靜態分析的整體的或最後的結果。這就驗證了無異曲線分析法的基本特性，也就是單調正向轉換前後的效用函數，表示相同的個人偏好。既然是代表相同的偏好，因此也應該隱含相同的個人行為。

有些經濟學家認為不需要用到總效用的二次微分項的經濟意義，或對其視而不見地故意加以忽略(事實上在模型中是有用到總效用的二次微分項，因為消費者均衡條件用到

一次微分項，而比較靜態分析的結果是建立在總效用的二次微分項，而不是沒有應用到，但卻故意對其經濟意義視而不見)，就足以建構出完整個體選擇的均衡理論。並且這樣能以比較少的條件建構出一樣好的理論的特性應該被正面看待，不需要依賴總效用的二次微分項的正負意義因此是序數效用理論的優點而不是缺點。

然而，還是有不少經濟學家不贊同序數效用理論必須排斥邊際效用遞減法則與「ALEP 互補性定義」的特性，他們批評這是一種「截肢」(Bernardelli, 1934, 1938)或「把效用可衡量的骯髒洗澡水與邊際效用的真實嬰兒一起倒掉」(Rothbard, 1956)的不恰當做法。

那如果要救回總效用二次微分項正負的經濟意義，我們其實可以退而求其次地採用序數效用理論的對手理論——基數效用分析法。

6. 基數效用理論對「ALEP 互補性定義」代價昂貴的救援

基數效用的定義是經濟個體有能力對不同選項組合進行排序（正如序數總效用分析法所要求的），並且，經濟個體還有能力對不同選項組合的移轉進行排序。

序數效用是對選項組合進行排序，就是對各個選項組合所對應的總效用進行排序的意思。此時對總效用函數進行單調轉換，不會改變消費者對選項組合的偏好次序。基數效用是還要能對選項組合的變化或移轉進行排序，就是對邊際效用進行排序的意思。為了確保對邊際效用的排序次序維持不變，此時只能對總效用函數進行正向線性轉換。

我們接著可以說明，只能進行正向線性轉換的基數效用理論的一些衍生性質。若我們對總效用 $U(x, m, y)$ 進行正向線性轉換使它變成 $V(x, m, y)$ ，如：

$$(23) \quad V(x, m, y) = \alpha U(x, m, y) + \beta = \alpha(u(x, y) + v(m)) + \beta; \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0$$

則 $U(x, m, y) = u(x, y) + v(m)$ 與 $V(x, m, y)$ 此時代表相同的基數效用偏好關係(總效用數列數據的效用差值的大小次序也相同)，正向線性轉換反映在 $\alpha > 0$ 的設定上，而 β 的數值正負則無關緊要，所以 $\beta \geq 0$ 。

正向線性轉換會衍生出以下的關係式：

$$(24) \quad V_x = \alpha U_x = \alpha u_x, \quad V_m = \alpha U_m = \alpha v_m$$

$$(25) \quad V_{xx} = \alpha U_{xx} = \alpha u_{xx}, \quad V_{mm} = \alpha U_{mm} = \alpha v_{mm}$$

$$(26) \quad V_{xy} = \alpha U_{xy} = \alpha u_{xy}, \quad V_{xm} = \alpha U_{xm} = 0, \quad V_{my} = \alpha U_{my} = 0$$

相對於單調轉換之下的分析結果，現在我們得到 $signV_{xx} = signU_{xx}$ 、 $signV_{mm} = signU_{mm}$ 、 $signV_{xy} = signU_{xy}$ 等結果，即正向線性轉換前後的總效用函數所對應的邊際效用變化方向的正負符號都相同。因此，在效用函數只能進行正向線性轉換之下可救回被序數效用理論所拋棄的常識性邊際效用遞減法則與「交叉邊際效用正負的 ALEP 替代品與互補品定義」。

7. 「無限地不可能的」基數效用

但是，有得就有失。基數效用是只能進行正向線性轉換的效用概念。正如 Allen (1935) 所正確指出地，正向線性轉換公式中的一個參數 α ，對應於長度測量概念中的「測量單位」(unit of measurement)，而另一個參數 β ，對應於長度測量概念中的「零標記」(zero mark)。因此正向線性轉換就是長度概念所具有的基本性質，基數效用是與長度的概念如公分與公尺一樣的可衡量概念，因此基數效用理論相當於走回古典的效用可衡量的已被拋棄的不量的老路。另外，Samuelson (1938) 主張為了得到(正向線性轉換)基數效用理論所再添加的假設太強烈，因此認為人們的偏好可以以這樣的效用函數來加以刻畫的條件在現實世界中可被滿足的機率是幾近於零，他以「無限地不可能的」(infinitely improbable) 的強烈字眼來批評基數效用理論的概念。

序數與基數效用兩種主要現代理論，都有嚴重的缺陷，使得個體選擇理論陷入兩難之中。正如，Bernardelli (1952) 就清楚地指出：

但這個認知或認同導致了一個非常尷尬的兩難困境…導致的明顯後果是，要不是說當我們在傳統意義上談到遞減的邊際效用和互補性時是在胡說八道，就是說我們（非法地）假設效用具備一個基數的衡量方式。乍看之下(Prima facie)這種脫節不是很合理的。

有些經濟學家認為，在序數效用理論中，不需要用到總效用的二次微分項的經濟意

義，就足以建構出完整個體選擇的均衡理論，而在基數效用理論中必須要接受效用可衡量的落伍概念才能獲得同樣的行為結果或預測結果。因此序數效用能以比較少的條件建構出一樣好的理論的特性應該被正面看待，所以序數效用理論是完美的或至少是比較好的理論。

8. 魔鬼藏在細節裡

但是，要特別注意地，**魔鬼藏在細節裡**，比較靜態分析的總效果可分成兩項，並且在序數效用理論中這兩分項的效果可能是會不一樣的，甚至連數值正負方向可能都會不一樣。

例如，所得變動的總效果中，單調轉換前後互相對應的兩小項的大小關係是：

$$(27) \quad \frac{U_{.xm} \geq V_{.xm}}{-A_{.xx} < -B_{.xx}} = \frac{F'U_{.xm} + F''U_x U_m}{-F'A_{.xx}} = \frac{U_{.xm}}{-A_{.xx}} - \frac{F''U_x U_m}{F'A_{.xx}}$$

$$(28) \quad \frac{pU_{.mm} \geq pV_{.mm}}{A_{.xx} < B_{.xx}} = \frac{pF'U_{.mm} + pF''U_m U_m}{F'A_{.xx}} = \frac{pU_{.mm}}{A_{.xx}} + \frac{pF''U_m U_m}{F'A_{.xx}}$$

因此，除非 $F''=0$ ，否則所得變化的比較靜態分析結果的兩個分項，在正向單調轉換前後的結果，可能會不一樣，這顯現出序數總效用極大化理論的侷限性或暴露出其嚴重缺陷。但因我們在其他文中已經有多次討論此問題，在此就不再進一步說明。

現在，我們關心的重點在於互補性效果的兩分項的比較，這兩分項分別是：

$$(29) \quad \frac{U_{.xy} \geq V_{.xy}}{-A_{.xx} < -B_{.xx}} = \frac{F'U_{.xy} + F''U_x U_y}{-F'A_{.xx}} = \frac{U_{.xy}}{-A_{.xx}} - \frac{F''U_x U_y}{F'A_{.xx}}$$

$$(30) \quad 0 = \frac{pU_{.my} \geq pV_{.my}}{A_{.xx} < B_{.xx}} = \frac{pF'U_{.my} + pF''U_m U_y}{F'A_{.xx}} = \frac{pU_{.my}}{A_{.xx}} + \frac{pF''U_m U_y}{F'A_{.xx}}$$

因此，除非 $F''=0$ ，否則單調正向轉換前後，雖然所獲得的總效果一樣，但是總效果可分成兩項，而這兩分項的數值可能會不一樣。其實，不只數值的大小可能會不一樣，連數值正負方向都可能不一樣。

此結果表明這兩個分項是不能有實際經濟意義的，否則在相同的偏好下會對應出不同的行為。但是，總效果中的兩個分項是不能有實際經濟意義的特性，會因此限制序數總效用模型的解釋能力與內涵的豐富性。這有時候會導致我們對實際現象做出錯誤或不

恰當的解釋。

這時候要採用怎樣的新的互補品、替代品與獨立品的定義呢？一項很自然想法是應該由比較靜態分析的結果來加以定義。也就是本文所採用的，若 $x_y > 0$ ，則為互補品。若 $x_y < 0$ ，即為替代品。最後，若 $x_y = 0$ ，則為獨立品。

但是，這種做法可以完美地取代建立於合理簡單的心理法則之上的「ALEP 的互補性定義」嗎？

答案是：不可以。這樣定義是會出大問題的。

第一，因為 $sign(V_{xy}) \neq sign(V_{xy} - pV_{my})$ ，可能會出現 $sign(V_{xy}) > 0$ 和 $sign(V_{xy} - pV_{my}) < 0$ 並存的結果，即由消費者心理的感受的觀點來看，兩者是 $sign(V_{xy}) > 0$ 互補品，但在透過對金錢的邊際效用的進一步影響後，整體的表現呈現是 $x_y < 0$ 替代品的特色。

第二，也可能會出現 $sign(V_{xy}) < 0$ 而 $sign(V_{xy} - pV_{my}) > 0$ 並存的結果，即由消費者心理感受的觀點來看，兩者是 $sign(V_{xy}) < 0$ 是替代品，但在透過對金錢的邊際效用的進一步影響後，整體的表現呈現 $x_y > 0$ 互補品的特色。

第三，可能會出現 $sign(V_{xy}) = 0$ 而 $sign(V_{xy} - pV_{my}) < 0$ 並存的結果，即由消費者心理感受的觀點來看，兩者是 $sign(V_{xy}) = 0$ 是獨立品，但在透過對金錢的邊際效用的進一步影響後，整體的表現呈現是替代品 $x_y < 0$ 的特色。

讀者還可以自己試想其他可能造成錯誤解讀真實現象的案例，就可體會到採取 $x_y > 0$ 為互補品的定義，可是會出大問題的具有缺陷的定義。

9. 結語

在序數效用革命之前，當時經濟學家採用交叉邊際效用正負來定義互補品與替代品，若總效用的二次微分項(或交叉邊際效用的正負)為正就是互補品、為負就稱為替代品、為零則稱為獨立品。此定義為 Auspitz 與 Lieben 率先提出，而知名的學者 Edgeworth 與 Pareto 也接受與採用此定義。

但在 Pareto 發起而由 Hicks and Allen 發揚光大的序數效用之後，情勢發生劇變。Auspitz、Lieben、Edgeworth、Pareto 等著名古典經濟學家所採用的互補性定義，因不能與序數效用的效用不可測性的概念和平共存，而被擺進個體經濟學的歷史博物館之中。

那用什麼來替代呢？

本文分析另一種可能的互補性定義：「若一個商品增加會提高另一商品的需求量則稱為互補品」。在總效用極大化的序列決策的分析架構之下，探討這是不是一個不會導致錯誤解釋消費者行為的好定義，是否可以完美地取代「ALEP 互補性定義」？答案是：不是的。「ALEP 互補性定義」還是有其無法被取代的獨特地位。

結論是，我們還是需要繼續尋找一個能讓類似於「ALEP 互補性定義」的新概念復活的兩全其美的序數效用理論。

Reference

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(1)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數與基數效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(2)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色：難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(3)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(I)：效用極大化的 Marshall 模型與無意義的邊際效用遞減法則〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(4)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為何 Marshall 需求理論必須被擺進經濟學歷史博物館？(II)：Marshall 的「邊際需求價格」模型與古典效用可衡量概念的意義〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(5)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈為 Marshall 需求理論編寫一冊返回經濟學舞台的劇本：比較商品效用與價格效用的邊際摸索決策方式的 Marshall 模型〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(6)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈跨界的「得」與「失」的序數邊際效用分析法：完成序數效用革命理

論的誕生〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(7)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈經濟學新的跨界十字交叉(A New Cross-Cross)圖形：取代無異曲線圖示的跨界序數邊際效用分析法的新圖示〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(8)，研討論文。

林忠正，(2015)，〈序數效用革命的頭號戰犯：序數主義者眼中邏輯謬誤的常識性邊際效用互補性定義〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(9)，研討論文。

Allen, R.G.D. (1935) "A Note on the Determinateness of the Utility Function," *Review of Economic Studies*, 2, pp. 155–158.

Bernardelli, H. (1934) "Notes on the Determinateness of the Utility Function: II," *Review of Economic Studies*, 2, pp. 69–75.

Bernardelli, H. (1938) "The End of the Marginal Utility Theory?," *Economica*, 5:18, pp. 192-212.

Bernardelli, H. (1952) "A Rehabilitation of the Classical Theory of Marginal Utility," *Economica*, 19:75, pp. 254-268.

Hicks, J.R. and R.G.D. Allen (1934) "A Reconsideration of the Theory of Value," *Economica*, NS, 1: 52–76, 196–219.

Rothbard, M. (1956) "Toward a Reconstruction of Utility and Welfare Economics," in Mary Sennholz ed. (Princeton, N.J: D. Van Nostrand, 1956), reprinted in *The Logic of Action One: Method, Money, and the Austrian School* by Murray N. Rothbard (London: Edward Elgar, 1997, pp. 211-255. Mises.org's online edition copyright.

Samuelson, P.A. (1938) "The Numerical Representation of Ordered Classifications and the Concept of Utility," *Review of Economic Studies*, 6, pp. 65–70.