邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色

難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則

林忠正[*]
中央研究院經濟所研究員
國立政治大學財政系教授
國立交通大學經營管理研究所教授
台北市南港區(115-41)研究院路 2 段 128 號
中央研究院經濟所
電話: 886-2-2782-2791 轉 507
電子信箱: cclin@econ.sinica.edu.tw

2015年10月10日-2015年12月31日

[*]謝謝林曉珮助理非常有效率的協助。

邊際效用遞減法則在序數與基數效用理論中的角色

難覓合適棲身之地的邊際效用遞減法則

[摘要] 在這篇簡單的文章中，我運用五種簡單的數學表述方式，來說明邊際效用遞減法則(law of diminishing marginal utility)在現代兩種主要效用理論，序數效用理論與基數效用理論中的角色。簡單地說，序數效用理論的一項主要特性是在其分析架構中不能容許邊際效用遞減法則(即純粹的總效用二次微分項為負)等概念有任何立錐之地。序數效用理論必須拋棄邊際效用遞減法則的特性，被批評是一種「截肢」或「把效用可衡量的骯髒洗澡水與邊際效用的真實嬰兒一起倒掉」的怪異理論。基數效用可以提供邊際效用遞減法則棲身之地，但基數效用的一項主要特色是效用此時是如長度一樣是一種相當強烈的可衡量的概念，效用可衡量一直被認為是一種落伍的不切實際的標誌。甚且，Samuelson (1938)指出在真實人生中構成基數效用所需添加的假設或公設出現的機率幾乎為零，因此以「無限地不可能的」(infinitely improbable)的極端負面字眼來傳達他對基數效用理論的論斷。總結而言，現代兩種主要效用理論，一個違反邊際效用遞減法則的常識，另一個違反效用不可測性的常識，有嚴重的缺失。而如何建構一套具有這兩種效用理論的優點而無缺點的兩全其美的新效用理論的任務，仍然沒有眾所周知的明顯進展，甚至看來是一項不可能實現的任務。由於效用理論是個體選擇理論的基礎，個體選擇理論是現代其他目不暇給的經濟理論的基礎，位於經濟學個體選擇理論最根基性的效用理論存在重大缺陷，這表示現代龐大的經濟理論體系是建構在不穩定的地基之上。此文的目的很單純，主要希望運用多種簡單的數學表述方式，來幫助不熟悉此問題的讀者深刻地了解與體認到現代效用理論與個體理論所面對的基本困境。

JEL 分類: B120, B130, B210, D010

1. 為何邊際效用遞減原則與序數效用概念是先天的宿敵

你去翻閱當今一本非常重要的個體經濟學教科書─Varian (1996) 的《中等個體經濟理論》(*Intermediate Microeconomics*)─書中的索引部分，找找看能不能發現「邊際效用遞減」(diminishing marginal utility)這個用詞。

你可以找到「邊際替代率遞減」(diminishing marginal rate of substitution)的術語，以及「技術替代率遞減」(diminishing technical rate of substitution)的用語，但在 650 頁的 Varian (1996)書中，你不會找到任何一次「邊際效用遞減」的用詞。

如果你翻閱另一本研究所的知名個體經濟學教科書，Jehle and Reny (2011, 3rd, p.4-5)的《高等個體經濟理論》(*Advanced Microeconomic Theory*)，你可以在該書中找到「邊際效用遞減法則」(Principle of Diminishing Marginal Utility)的用語。但作者提到此用語的目的不是為了介紹此概念以供後續的分析之用，而是用來說明為何後續的分析不會使用它。也就是，不是正面性地推崇此概念，而為了負面性地貶抑這個概念。他們說：

> …「邊際效用遞減原理」被接受作為一種心理「法則」，需求法則早期的論述是依賴於此法則。這些都是關於人類心智的內部運作非常可怕地強烈的假設。[1]

「邊際效用遞減」的概念是如此正常與尋常的概念，蘋果或橘子一顆接著一顆繼續吃下去，很快地一顆接著一顆的邊際效用(邊際滿足)的相對大小會依次愈來愈低(甚至變成負的)，這是非常尋常的日常經驗。也是古典經濟學家如 Gossen、Jevons、Menger、Walars、以及 Marshall 等一直採用的重要經濟概念。例如，知名的古典的戈森定律(Gossen law)，就主張，邊際效用隨著個人所持有的商品數量的增加而下降。[2]

為什麼 Varian (1996)會這樣做？Jehle and Reny (2011)會這樣批評？這到底是為什麼?為什麼這麼自然的、正常的、熟悉的習慣性概念如此罪大惡極，為何這些概念被標誌著

[1] In additional, the ‘Principle of Diminishing Marginal Utility’ was accepted as a psychological ‘law’, and early statements of the Law of Demand depended on it. These are awfully strong assumptions about the inner working of human beings.

[2] 見 Bernardelli(1938)：「戈森定律(Gossen law)，也就是，邊際效用隨著個人所持有的商品數量的增加而下降」(The so-called Gossen law, e.g., that marginal utility decreases with an increasing stock of goods in possession of a person)。

落伍的、不科學精神的標籤，為何這些概念在現代主流經濟學理論中是無意義的概念呢？

若要救回邊際效用遞減法則，可以怎樣做呢？並且，因此要付出怎樣的代價呢？

簡單地說，「消費者在預算限制下極大化總效用的基本分析架構」一直是經濟學家分析個體選擇行為的基本分析典範。但很少人會認真思索此分析架構中所謂的效用或效用函數到底所指為何？效用在此描述消費者的滿足或幸福度，但滿足或幸福是一種感覺，感覺怎能用「效用數字」來加以刻畫呢？當我們用「效用數字」來加以刻畫消費者的滿足或幸福度時會造成怎樣的特性與限制呢？本文討論現代經濟理論中兩種主要的序數和基數效用概念與邊際效用遞減法則的微妙或出乎一些人意料之外的關係。

序數效用的**「第一個假設」**是經濟個體有能力對不同的選項組合進行偏好或效用排序。一個序數效用函數經過任何正向單調轉換(monotonic transformation)後所對應的新函數還是可以維持或表示原來的偏好次序。序數效用數值大小只有排序大小的意義，這是一種很好的效用概念。但正向單調轉換前後的效用函數此時所各自對應的總效用的二次導數(二次微分項)的正負符號可能不同，所以在序數效用理論的架構中不能容許邊際效用遞減法則(純粹的總效用二次微分項為負)的概念有任何生存餘地。有些經濟學家認為不需要用到邊際效用遞減的概念，就足以建構出完整個體選擇的均衡理論；並且這樣能以比較少的條件建構出一樣好的理論的特性應該被正面看待，不需要依賴邊際效用遞減法則因此是序數效用理論的優點而不是缺點。然而，還是有不少經濟學家不贊同序數效用理論必須排斥邊際效用遞減法則的特性，他們批評拋棄邊際效用遞減的概念是一種「截肢」(Bernardelli, 1934, 1938)或「把效用可衡量的骯髒洗澡水與邊際效用的真實嬰兒一起倒掉」(Rothbard, 1956)的不恰當作法。

序數效用理論不能容許邊際效用遞減法則等合理概念有任何容身之所的缺點，促成了基數效用理論的發展與盛行。

基數效用的**「最基本的主張」**是個人有能力對不同選項組合進行偏好或效用排序（如序數效用理論），除此之外，個人還有能力對任何兩個選項組合的變化或移轉的偏好或效用進行排序。一個基數效用函數經過任何正向線性轉換(positive linear transformation)所對應的新函數還是可以維持或代表原來的偏好次序，正向線性轉換前後的效用函數所各自對應的二次導數(微分項)的正負符號可以維持不變，所以基數效用理論提供邊際效用遞

減法則(純粹的二次導數為負)容身之處。但是，正向線性轉換就是公分與公尺等長度概念所具有的基本性質，基數效用正向線性轉換的特性因此隱含個人有能力分辨任何兩個效用值的差異(類似長度)的比例，此時效用變成一種相當強烈的可衡量的概念，效用可衡量一直被認為是一種落伍的不切實際的標誌。甚且，藉由明確的數學證明，Samuelson (1938)很肯定地且很有說服力地指出在真實人生中構成基數效用所需添加的假設或公設出現的機率幾乎為零，因此以「無限地不可能的」(infinitely improbable)的極端負面字眼來傳達他對基數效用理論的論斷。

序數與基數兩種現代的主要效用理論各自有各自的嚴重缺陷，如何建構一套具有兩種效用理論的優點而無其缺點的新的兩全其美理論的任務，卻仍然沒有眾所周知的重要進展，看來還是一項不可能達成的任務。

當時參與序數與基數效用理論相關爭論的 Bernardelli (1938)就曾感慨地指出：「心理測量問題及其對經濟理論的影響至今已被證明是最令人費解的謎團之一」(the problem of psychological measurement and its bearing on economic theory so far has proved to be one of the most puzzling riddles)。其實，不只在此理論草創之時這是最大的一個謎團，這個謎團至今還未被成功地破解，甚至 Lancaster (1953)強調說：「這件事不論 Bernardelli 博士或其他任何人都是無能為力的。」

現代個體經濟理論與強調個體基礎的總體理論，因此是建構在很不完美的不穩定的根基上，一些經濟學家並不清楚自己所應用的經濟理論究竟是序數效用理論或是基數效用理論，一些經濟學家不知道兩種效用理論各自有如此重大的缺陷。因此，正如 Bernardelli (1952)所說的：他們自己並不知道「**他們真正在做什麼事。事實上，所有作者一直硬將經濟學的問題強迫性地塞入偏好尺度和邊際替代率的緊身衣中**」。

由 Pareto、Slutsky、Allen、Hicks、Samuelson 以及其他很多參與基礎理論建構與討論的偉大經濟學家所發動與鼓吹的序數總效用理論，並沒有真正成功地實現序數效用革命的長期夢想或理想。

在接下來的簡單模型中，我運用五種數學表述方式，說明邊際效用遞減法則在現代序數與基數兩種主要效用理論中的尷尬角色，以彰顯為何邊際效用遞減法則在這兩種效用理論之中難覓合宜的棲身之所。而如何建構一項兩全其美的效用理論，即能提供邊際

效用遞減法則一個合理的容身之地的序數效用理論，至今還是一項最令人費解的且充滿挑戰性的謎團。

2. 序數效用理論與「邊際效用遞減原則」是先天的宿敵

如前所述，序數效用的「第一個假設」是經濟個體有能力對不同的選項組合進行偏好或效用排序。一個序數效用函數經過任何正向單調轉換後所對應的新函數還是可以維持與代表原來的偏好次序，但單調轉換前後的效用函數所各自對應的二次導數(二次微分項)的正負符號可能不同，所以在序數效用理論的架構中不能容許邊際效用遞減法則有任何立錐之地。

有些經濟學家認為不需要邊際效用遞減法則的序數效用理論，就足以推導出消費者均衡條件，就足以建構出完整的消費理論的觀點來看，序數效用理論因此是足夠好的理論，並且這意味著邊際效用遞減法則其實是多餘的、膚淺的、無意義的、且不科學的概念。拋棄此概念不只不可惜，經濟學拋棄這種不可觀察的主觀心理法則的作為，其實，還是一種邁向真正科學的進步象徵。

但也有很多經濟學家不同意這種看法，他們認為邊際效用遞減法則是古典經濟學前輩的理論的精華與核心精神，邊際效用遞減法則是一種合情合理的心理現象。序數效用理論必須排斥邊際效用遞減法則的特性，被批評是一種「截肢」或「把效用可衡量的骯髒洗澡水與邊際效用的真實嬰兒一起倒掉」的怪異理論。

接著，我們應用一些簡單的數字性、方程式與數學模型，來清楚地呈現一些相關的論述與爭議。

2.1 特殊數據性的例子

我先舉一個相當容易理解的數據性例子，說明為何邊際效用遞減法則與序數總效用概念是先天宿敵的基本癥結。

如果你對 5 顆蘋果的偏好超過 4 顆，對 4 顆蘋果的偏好超過 3 顆，對 3 顆蘋果的偏好超過 2 顆，對 2 顆蘋果的偏好超過 1 顆。依據序數效用的基本特性或基本理念：反映相同排序次序的數列都可以用來表示同一偏好關係。此時你對 1 顆、2 顆、3 顆、4 顆、

5 顆的蘋果總效用，可以用(1,2,3,4,5)、(1,3,6,10,15)以及(5,9,12,14,15)三個大小次序相同的不同的總效用數列來加以描述。但是，值得注意的，這三個不同的總效用數列各自所對應的邊際效用分別為：維持不變的邊際效用常數(1,1,1,1,1)、持續增加的邊際效用遞增(1,2,3,4,5)、以及不斷減少的邊際效用遞減(5,4,3,2,1)。

另外，因為任何經過單調正向轉換後的總效用數列，都可以與原總效用數列用來表示相同的偏好關係。因此，當將(1,2,3,4,5)的總效用數列，藉由平方而轉換成(1,4,9,16,25)的總效用數列，以及透過開根號換成$(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5})$的數字時，這三個總效用數列當然都可以用來刻畫相同的偏好關係。但是，當我們採用(1,2,3,4,5)的總效用數列時，其邊際效用是常數(1,1,1,1,1)；當我們使用的總效用序列是(1,4,9,16,25)時，其邊際效用變成遞增(1,3,5,7,9)；而當總效用數列轉變成$(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5})$時，其邊際效用則變成遞減$(1,\sqrt{2}-1,\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{4}-\sqrt{3},\sqrt{5}-\sqrt{4})$。

以上的舉例，清楚地展現可以用來描述相同偏好關係的不同總效用數列，所分別對應的邊際效用可以有些是常數、有些是遞增、有些是遞減。從而邊際效用遞減(遞增或常數)的概念，變得很尷尬，而顯得無處容身。這些概念在序數效用理論中效用數字只有大小次序有意義的主要大旗下，變成一種沒有恆定立場的幻覺式的或變幻多端得難以掌握的概念、而變成一種無意義的且不科學的概念。

這表示如果不放棄「邊際效用遞減法則」，則隱含「代表同一偏好的不同總效用數列隱含不同的(邊際效用)偏好」，這顯然是一項互相矛盾的論述。換句話說，如果保留「邊際效用遞減法則」，等於要放棄效用只能排序大小的「序數效用」的核心精神。「邊際效用遞減法則」與序數效用理論的「序數」的核心理念是無法相容的概念，這展現了為何邊際效用遞減法則與序數總效用概念是先天宿敵的基本關鍵。

2.2 一般化效用函數形式

以一般化的數學方程式進行分析，可以更完整周全地呈現為何邊際效用遞減法則與序數總效用概念是先天宿敵的根本癥結。我們先寫下以下的正向單調轉換的關係式

(1) $$V(x,m)=F(U(x,m));\quad F'>0, F''\gtrless 0,$$

其中，x和m是消費者所面對的兩個選項。通常我們以x表示商品x的數量，而m表示

消費者所保留的現金或所得的多寡。$U(x,m)$ 與 $V(x,m)$ 是用來描述消費者對不同的商品數量與現金組合 (x,m) 的偏好關係的總效用函數。$U(x,m)$ 是原先的總效用函數，而 $V(x,m)$ 為藉由 $F(U)$ 的正向單調轉換後所得到的新的總效用函數，正向單調轉換的特性反映在轉換函數 $F(U)$ 的一階導數為正 $F'(U)>0$ 的特性上。二階導數的正負則完全不會影響單調正向轉換的特性，所以 $F'' \gtreqless 0$。單調正向轉換前後的總效用數列數據的大小次序相同，$U(x,m)$ 與 $V(x,m)$ 代表相同的偏好，這是序數效用理論的基本教條。正如 Varian (1996)所強調的：「一個效用函數的單調轉換是一個與原始效用函數具有相同偏好的效用函數(a monotonic transformation of a utility function is a utility function that represents the same preferences as the original utility function)」。事實上，可以用來描述同一偏好的總效用數列有無窮多個，每一個又都可以進行無窮多種的單調轉換，因此序數效用使用一種非常低程度的效用可衡量的概念，準確地說，這是一種「序數可衡量」(ordinal measurability)的概念。

對總效用 $U(x,m)$ 進行正向單調轉換使它變成 $V(x,m)$ 之後，會衍生出以下的關係式：

(2) $$V_x = F'U_x,\ V_m = F'U_m,$$

(3) $$V_{xx} = F'U_{xx} + F''U_xU_x,\ V_{mm} = F'U_{mm} + F''U_mU_m,$$

因為 $F'' \gtreqless 0$ 皆可，若原總效用函數 $U_{xx}<0$ 邊際效用遞減，而 $F''>0$，則新總效用函數可以 $V_{xx} \gtreqless 0$，即可以是邊際效用遞減、常數、或遞增。我們可以獲得 $signV_{xx} \neq signU_{xx}$、$signV_{mm} \neq signU_{mm}$ 的結果，即正向單調轉換前後的總效用函數所對應的純粹二階導數 U_{xx} 與 V_{xx} (以及 U_{mm} 與 V_{mm})的數值正負符號可能不同。邊際效用遞減法則與序數效用概念是天敵，彼此毫無共存共榮的機會。我們因此面對尖銳的兩難而必須進行的痛苦地取捨，不是必須放棄總效用的二次微分項數值的正負直接的與間接衍生的經濟意義，就必須放棄序數效用的核心概念。

2.3 特殊效用函數形式

為加深不熟悉此研究題材的讀者的印象，接著我再以三個特殊的效用函數來加以解釋。

這三個特殊的效用函數分別是：

(4-A) $$U^1(x,m) = xm,$$

(4-B) $$U^2(x,m)=x^2m^2,$$

(4-C) $$U^3(x,m)=x^{1/2}m^{1/2},$$

這三個效用函數所對應的邊際效用雖然數值大小可能不同，但都是正值，它們分別是

(5-A) $U_x^1=m>0$, $U_m^1=x>0$；邊際效用為正

(5-B) $U_x^2=2xm^2>0$, $U_m^2=2x^2m>0$；邊際效用為正

(5-C) $U_x^3=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}>0$, $U_m^3=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}m^{-\frac{1}{2}}>0$；邊際效用為正

不同的是，它們所對應的邊際效用，分別是常數、遞增或遞減：

(6-A) $U_{xx}^1=0$, $U_{mm}^1=0$；邊際效用常數

(6-B) $U_{xx}^2=2m^2>0$, $U_{mm}^2=2x^2>0$；邊際效用遞增

(6-C) $U_{xx}^3=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}m^{\frac{1}{2}}<0$, $U_{mm}^3=-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}m^{-\frac{3}{2}}<0$；邊際效用遞減

換句話說，這三個效用函數彼此是彼此的單調轉換函數，其所對應的任何選項組合($x.m$)的偏好次序或效用數值次序，是維持不變的。因此三個不同的效用函數都可以用來表示同樣的偏好關係，但其中一個的邊際效用是常數、一個是遞增、一個是遞減。

我們也再次展示了用來表示同樣偏好的合格的不同的效用函數，分別各自對應的總效用的純粹二次微分項的正負符號可能有所不同。

2.4 特殊效用函數的決策模型

接著以大家非常熟悉的「消費者在預算限制下極大化總效用」的三個特殊模型，呈現與說明序數效用單調轉換性質所衍生的進一步的涵義：

(7-A) $$\max_{x,m}\quad U^1(x,m)=xm\quad s.t.\quad px+qm=M,\quad q=1,$$

(7-B) $$\max_{x,m} \quad U^2(x,m)=x^2m^2 \quad s.t. \quad px+qm=M, \quad q=1,$$

(7-C) $$\max_{x,m} \quad U^3(x,m)=x^{1/2}m^{1/2} \quad s.t. \quad px+qm=M, \quad q=1,$$

這三個模型的邊際效用雖然數值不同但其正負符號都是正值，但它們所對應的邊際效用分別呈現常數、遞增或遞減的特性，這些結果已經記錄在上述的方程式(5-A)至(6-C)中了。

在另一方面，這三個模型所對應的邊際替代率卻又是完全一樣的，它們分別是：

(8-A) $$MRS^1_{xm}=\frac{U^1_x}{U^1_m}=\frac{m}{x},$$

(8-B) $$MRS^2_{xm}=\frac{U^2_x}{U^2_m}=\frac{2xm^2}{2x^2m}=\frac{m}{x},$$

(8-C) $$MRS^3_{xm}=\frac{U^3_x}{U^3_m}=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}m^{-\frac{1}{2}}}=\frac{m}{x},$$

也就是說，邊際替代率或邊際效用的比值，不會因為效用函數經過任何的單調轉換而發生任何變化；即使單調轉換前後的效用函數所各自對應的邊際效用的數值大小可能不同，並且各自對應的邊際效用的變化率(遞增、遞減或常數)也可能不同。

因為這三個模型的預算限制式完全一樣，因此，相同的邊際替代率自然隱含消費者最適化的一階條件，也完全一樣。即：

(9) $$MRS^i_{xm}=\frac{m}{x}=\frac{p}{q}=p, \; i=1,2,3; \quad px+qm=M, \quad q=1,$$

另外，因為三個消費者選擇模型的邊際替代率完全一樣，三個模型最適化的二階條件也完全一樣，也就是無異曲線凸向原點的條件會成立，$\partial MRS^i_{xm}/\partial x=[x(\partial m/\partial x)-m(\partial x/\partial x)]/x^2=[x(-m/x)-m]/x^2=-2m/x^2<0$。

簡單的計算，可以了解這三個不同模型的需求函數的形式也完全一樣，

(10) $$x^* = \frac{1}{2}\frac{M}{p},$$

(11) $$m^* = \frac{1}{2}\frac{M}{q} = \frac{1}{2}M,$$

分析至此，我們發現，在三個模型的效用函數彼此為彼此的單調轉換函數的前提下，因為單調轉換前後的效用函數不會改變偏好次序，即單調轉換前後的效用數值的相對大小不會發生改變，此時消費者均衡條件完全一樣，最適解(需求函數)完全一樣，表示同樣的消費決策與購買行為。雖然，不熟悉這項序數效用理論特色的讀者，會感到驚訝與特別關注的是：三個不同模型的邊際效用一個常數、一個遞增、一個遞減。但這項怪異性質是無關緊要的，因為**看來**我們已經能夠非常成功地描繪消費者選擇的最適均衡條件與最適選擇後果(實際購買數量)了。

就如 Varian (1996) 所強調的：「在幾何上，一項效用函數是一種標記無異曲線的方法。因為在同一條無異曲線上的每個組合一定具有相同的效用，一個效用函數是以位置愈高的無異曲線得到愈大的指定數字的方式來指定給不同的無異曲線不同的數字。從此觀點來看，單調轉換只是重新標記無異曲線。只要包含愈喜歡商品組合的無異曲線比包含愈不喜歡商品組合的無異曲線得到一個較大的標記，則這些標記都將會代表相同的偏好。」[3]

又如，Silberberg (1978) 在其知名的數理經濟學教科書《經濟學的結構：數學分析》(*The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*)中的第一章「比較靜態與經濟學典範」(Comparative Statics and the Paradigm of Economics)中論述的經濟學方法論時所強調：

> 需求曲線獨立於效用函數的任何單調轉換；也就是說，它們是獨立於對無差異曲線圖重新標記效用數據大小的舉動。這個命題只是強化只有交換價值才是重點的觀念。沿任意一條無差異曲線，斜率反映或衡量一位消費者為獲得更多的一種商品所願意放棄的另一種商品的

[3] Geometrically, a utility function is a way to label indifference curves. Since every bundle on an indifference curve must have the same utility, a utility function is a way of assigning numbers to the different indifference curves in a way that higher indifference curves get assigned larger numbers. Seen from this point of view a monotonic transformation is just a relabeling of indifference curves. As long as indifference curves containing more-preferred bundles get a larger label than indifference curves containing less-preferred bundles, the labeling will represent the same preferences.

數量的取捨關係。這些商品的邊際評價是價值的唯一操作型衡量方式；無論無異曲線是被標記為 10 效用單位或 10,000 或 1010 效用單位一點也不重要。關於某一水平的曲線所對應的價值和交易意義，是斜率；也只有是斜率，才是重要的，而不是標記在任何消費組合上的「滿意」指標的大小。事實上，我們不可能分辨消費者是高興還是不高興於消費特定的商品組合。如果他或她必須作出決定的僅只這些貨品，但交換值不是不可能分辨的。[4]

上面的推導也澄清了為什麼邊際效用遞減的概念對現代經濟學是不相關的。應用嚴格序數效用，相對於商品的變化所產生的邊際效用的變化率只取決於所採用的特殊的排序指數。考慮 V_{ij} 和 U_{ij} 之間的關係：

$$V_{ij} = F'U_{ij} + F''U_iU_j$$

設 $F' > 0$，並且 U_i 和 U_j 是正值，因為沒有最高滿足點(nonsatiation)。然而，F'' 可以是正數也可以是負數；例如，如果 $F(U) = \log U$，則 $F' > 0$ 和 $F'' < 0$；如果 $F(U) = e^U$，則 $F' > 0$ 和 $F'' > 0$。假設 $U_{ij} < 0$。然後，如果 $F'' > 0$，則可能會出現 $V_{ij} > 0$。同樣地，如果 $U_{ij} > 0$，則有一些單調轉換將使負的 $F'' < 0$ 足夠大到使得 $V_{ij} < 0$。因此的 U_{ij} 和 V_{ij}（其中包括 U_{ji} 和 V_{ji} 的情況下）不需要具有相同的符號，但相同的需求曲線還是可由這些不同的效用函數推導而得！因此，一組給定的觀察到的需求關係是與呈現邊際效用遞減的效用函數是一致的，並且是與一些單調轉換後呈現出邊際效用遞增的效用函數也是一致的。因此，邊際效用變化率增加或減少沒有帶來可觀察到的含意。

4 The demand curves are independent of any monotonic transformation of the utility function; i.e., they are independent of any relabeling of the indifference map. This proposition simply reinforces the notion that it is only exchange values that matter. Along any indifference curve, the slope measures the trade-offs a consumer is willing to make with regard to giving up one commodity to get more of another. These marginal evaluations of goods are the only operational measures of value; it matters not one whit whether that indifference curve is labeled as 10 utiles or 10,000 or 1010 utiles. It is slope, and only the slope, of that level curve that matters for value and exchange, not some index of “satisfaction” associated with any given consumption bundle. In fact, it is impossible to tell whether a consumer is pleased or displeased to consume a given commodity bundle. If those are the only goods over which he or she has to make decisions, the exchange values do not.

這一切看起來很完美，序數效用理論看來似乎就足夠建構出合理的消費理論了。

因此有些經濟學家認為既然拋棄邊際效用遞減法則，序數效用理論還是足以獲得消費者均衡條件與建構完整的消費理論，序數效用理論當然是足夠好的理論。邊際效用遞減法則因此是多餘的、無意義的概念。何況邊際效用遞減法則是一種不可客觀觀察的心理法則，棄置不可觀察的主觀心理法則，還是應該被認為是一種理論進步的進步標誌。

也有經濟學家無法認同，他們認為，邊際效用遞減法則是一種合情合理的心理現象，也是古典經濟學前輩的理論的根基。序數效用理論如法容納邊際效用遞減法則的天性，被他們批評為是一種「截肢」或「把效用可衡量的骯髒洗澡水與邊際效用的真實嬰兒一起倒掉」的怪異論述。

例如，Bernardelli (1934)曾經評論說：

> 無疑地，這是 Allen 和 Hicks 的研究…迫使我們下結論說，他們的論文〈價值理論重建」的味道是很淡的，而是作為一個不言自明的公設實驗…這種情況似乎相似於數學家的公理研究工作，其中有人已經表示的，他們的方法澄清了數學知識的不同部分的相互關係，這類似於一個人切斷他的條腿的行為，為了看他作為一個跛子會變得如何。一個人在沒有第二假設的腿之下會變得如何是非常不尋常的，正如 Pareto 以及最近 Allen 和 Hicks 的結果所證明的。然而，這似乎不是使這樣截肢行為變成一種美德的充分理由。[5]

又如 Rothbard (1956)既傳神又貼切的批評：

> 「在 20 世紀 30 年代初由 Hicks 和 Allen 所領導的序數效用主義者的叛軍，覺得有必要推翻邊際效用本身以及可測量性的概念。他們，如此的作為，等於是將效用的嬰兒與基數的洗澡水一起倒掉。」[6]

[5] The case seems to be similar to the axiomatic research work of the mathematicians, of which someone has said, that their method of clarifying the interrelations of the different parts of mathematical knowledge, is similar to the behavior of a man who cuts off one of his legs, in order to see how he gets on as a cripple. And it is extraordinary how one can get on without the leg of the second postulate, as the results of Pareto, and more recently of Allen and Hicks, prove. Yet this would seem insufficient reason for making a virtue of such an amputation.

[6] The ordinalist rebels, led by in the early 1930, felt it necessary to overthrow the very concept of marginal

2.5 一般化效用函數的決策模型

在此小節中，我們以一般化的消費者選擇模型來更準確地討論上述的分析結果。此時，我們可以假設，一位擁有財富或所得水準 M 元的消費者，在面對單位價格是 p 元的 x 商品時，於 Pareto-Slutsky-Hicks-Allen 的消費模型之下，如何決定購買多少數量的 x 商品以及保留多少現金或所得 m 。

消費者的購買決策或思維方式設定如下：

$$(12) \qquad \max_{x,m} \quad U(x,m); \quad U_x > 0, U_m > 0, \quad s.t. \quad px + qm = M, q = 1,$$

將預算限制式 $m = M - px$ ，代入效用函數中，模型變成：

$$(13) \qquad \max_{x} \quad U(x, M - px),$$

令 $A \equiv U(x, M - px)$ ，接著一階條件可表示為：

$$(14) \qquad A_x = U_x(x, M - px) - pU_m(x, M - px) = 0 \quad 或 \quad \frac{U_x(x, M - px)}{U_m(x, M - px)} = p,$$

具有內部解時，因 $U_{xm} = U_{mx}$ ，二階條件要求：

$$(15) \qquad A_{xx} = U_{xx} - 2pU_{xm} + p^2U_{mm} < 0,$$

簡單的計算可得，所得變動對購買數量的效果為：

$$(16) \qquad x_M = \frac{U_{xm} - pU_{mm}}{-A_{xx}},$$

價格變動對購買數量的效果為：

$$(17) \qquad x_p = \frac{U_m + x(U_{xm} - pU_{mm})}{A_{xx}} 。$$

單調正向轉換後的 Pareto-Slutsky-Hicks-Allen 的消費模型變成：

---

utility along with measurability. In doing so, they threw out the Utility baby with Cardinal bathwater.

(18) $$\max_{x,m} \quad V(x,m)=F(U(x,m)); \quad F'>0, \; s.t. \quad px+qm=M, q=1,$$

將預算限制式 $m=M-px$，代入效用函數中，模型變成：

(19) $$\max_{x} \quad V(x,M-px)=F(U(x,M-px)); \quad F'>0,$$

令 $B\equiv V(x,M-px)$，最適化的一階條件可表示為：

(20) $$B_x=V_x(x,M-px)-pV_m(x,M-px)=0 \text{ 或 } \frac{V_x(x,M-px)}{V_m(x,M-px)}=p,$$

內部解的二階條件要求($V_{xm}=V_{mx}$)：

(21) $$B_{xx}=V_{xx}-2pV_{xm}+p^2V_{mm}<0 \text{。}$$

簡單的計算可得所得變動對購買數量的效果為：

(22) $$x_M=\frac{V_{xm}-pV_{mm}}{-B_{xx}},$$

價格變動對購買數量的效果為：

(23) $$x_p=\frac{V_m+x(V_{xm}-pV_{mm})}{B_{xx}} \text{。}$$

證明單調正向轉換前後的分析結果會一樣

首先，由單調正向遞增轉換前的最適化一階條件 $A_x=U_x-pU_m=0$ 與轉換後 $B_x=V_x-pV_m=0$ 是完全相同的，因為：

(24) $$p=\frac{V_x}{V_m}=\frac{F'U_x}{F'U_m}=\frac{U_x}{U_m},$$

這表示，單調正向遞增轉換後的最適化條件不變，即最適解的數值不變。

其次，比較單調正向轉換前後兩個模型的比較靜態分析結果，我們發現兩模型的分析結果的外表(數學符號)長得雖然乍看之下不一樣，但是由無異曲線分析法的基本特性

來看，單調正向轉換前後的效用函數表示相同的偏好，所獲得的分析結果**(總結果)**應該一樣才對。所以，我們應該可以證明單調正向轉換前後兩個模型的比較靜態分析的總效果或最後的結果會完全相同，即式(16)與式(22)以及式(17)與式(23)必須相同。

這證明過程非常簡單，計算過程置於【附錄】中，我們的確可以證得它們各自倆倆相等的結果，即：

$$\frac{V_{xm} - pV_{mm}}{-B_{xx}} = \frac{U_{xm} - pU_{mm}}{-A_{xx}}, \tag{25}$$

$$\frac{V_m + x(V_{xm} - pV_{mm})}{B_{xx}} = \frac{U_m + x(U_{xm} - pU_{mm})}{A_{xx}}, \tag{26}$$

其中，$B_{xx} = F'(U_{xx} - pU_{xm} - pU_{mx} + p^2 U_{mm}) = F' A_{xx}$。

因此我們藉由數學證明發現總效用函數經過單調正向轉換後，不會影響消費者的均衡條件，也不會影響比較靜態分析的整體的或最後的結果。這就驗證了無異曲線分析法的基本特性，也就是單調正向轉換前後的效用函數，表示相同的個人偏好。既然是代表相同的偏好，因此也應該隱含相同的個人行為。

2.6 完美理論或「將嬰兒連洗澡水一起倒掉的」理論

這一切看起來很完美，序數效用理論看來似乎就足夠建構出合理的消費理論了。因為任何可以用來表示相同偏好關係的效用函數，也就是任何總效用函數經過任何單調正向轉換後，都不會影響消費者的均衡條件，也都不會影響比較靜態分析的整體的或最後的結果。因此，即使有些總效用函數所對應的邊際效用遞減、有些遞增以及有些不變，但這無關緊要，因為這些差異性看來似乎絲毫也不會影響分析結果，所以邊際效用遞減等概念是無意義的概念。這也難怪有些經濟學家主張邊際效用遞減法則其實是多餘的、膚淺的、無意義的、且不科學的概念。拋棄此概念不只毫不足惜，這種割捨掉不可觀察的主觀心理法則的作法，可被正面地標舉為一種讓經濟學邁向真正科學的進步徽章。

就像 Hicks (1939) 在《價值與資本：研究經濟理論的一些基本原則》(*Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*)書中，由奧卡姆剃刀(Occam’s Razor)原則的角度，來彰顯序數效用理論不需要用到邊際效用遞減法則是一項

進步理論的象徵。在書中的第一章的第四節中(第 17-18 頁)，Hicks 如是說：[7]

> 我們在圖上給無異曲線所定的數字，當然是完全武斷的；為方便起見，我們依無異曲線上升的順序而提高這些數字；但是這些數目字可以是 1、2、3、4……，也可以是 1、2、4、7……、1、2、7、10……，或我們隨意採用的任何上升的數列。
>
> 這樣，Pareto 的一小片幾何圖解產生了一個在方法論上具有廣大重要性的結論。在任何價值理論裡面，都必須確定具有「一定慾望」或「一定嗜好」的消費者究何所指。在 Marshall 的理論（正如 Jevons、Walras 以及奧國學派的理論一樣）裡面，「一定慾望」被解釋一定的效用函數，亦即對任何一組貨品希求的一定深度。這個假設曾使許多人感覺不快，但在 Pareto 的著作裡面，這個假設全不必要。「一定的慾望」可以解釋為一定的「偏好尺度」；我們只要設想消費者對一組貨品比對另一組貨品有所偏好，而不需設想在說「他對一組貨品比對另一組貨品的希求多 5%」這一句話或任何類似的話時有何意義。
>
> 這並不是說，如果任何人根據其他任何理由設想效用、滿足、或稱意有某種適當的數量尺度，上述解釋有任何足資反駁的論據。如果某一個人在哲學上是一個效用主義者，他在經濟學上也有充分的權利作一個效用主義者。但是如果他不是的話（現在很少人是效用主義者），他也有權利研究不涉及效用主義的假定的經濟學。
>
> 從這個觀點著眼，Pareto 的發現只是替我們開了一扇門，我們可以隨自己高興進去或不進去。不過從技術的經濟觀點著眼，我們認為有堅強的理由應該進去。為了解釋市場現象，效用的數量觀念並不必要。因此，依照奧卡姆剃刀 (Occam's Razor)的原則，最好是不要用它。因為一個理論包含了不必要的因素，在實際上就是一件無關輕重的事。這些因素既然與手頭上的問題毫不相干，它們的存在只會模糊視線。這一點究竟有多麼重要，只能靠經驗證明；我希望能說服讀者在這個

[7] 此中文譯稿擷取自於邢慕寰 (1967)，《價值與資本》(*Value and Capital*)。

場合它是相當重要的。

然而，必須放棄邊際效用遞減法則還是一項具有重大爭議作法。很多經濟學家不同意，事實上，在總體經濟學、成長理論、國際金融理論、預期效用理論(為了定義風險態度)、以及其他各式各樣的模型常需要採取或保留如消費的邊際效用遞減等假設，這通常為了確保最適化的二階條件成立或為了賦予經濟模型更豐富的經濟內涵等目的。因此，序數(總)效用其實在很多應用領域中常常是一種名存實亡的理論。

事實上，有很多經濟學家不同意這種看法，他們認為邊際效用遞減法則是古典經濟學前輩的理論的精華與核心精神，邊際效用遞減法則是一種合情合理的心理現象。有些經濟學家為克服序數效用這些缺點，於是轉身研究基數效用理論的概念，而投身於不同的效用概念的陣營。

在一般的文章中，我推測接下來就會立即轉身進一步介紹基數效用理論。但在此文章，我呼籲我們應該再繼續前進之時，先停下腳步來，再仔細想一想，序數效用理論所建構出的需求理論真的沒有缺點嗎？沒有邊際效用遞減等概念真的不會對需求理論造成嚴重傷害嗎？其實，魔鬼藏在細節裡！

2.7 林忠正的批評：魔鬼藏在細節裡，序數效用理論可能會曲解事實

藉由以上的分析，看來任何總效用函數經過任何單調正向轉換後所構成的消費者選擇模型的數學分析結果都是一樣的，序數效用理論因此是完美的理論，但在做下此結論之前。要提防外表是會騙人的！要知道魔鬼藏在細節裡！再多想想你可能會發現雖然單調正向轉換前後的任何兩個模型，所獲得的分析結果**(或更精準地說是總效果的分析結果)**是一樣的，但是若總效果可分成兩項，你會驚訝地發現這兩分項可能是會不一樣的。這兩分項不只數值的大小可能不一樣，連數值正負方向可能都會不一樣。

這項事實，可以利用所得變動的效果作為例子來加以說明。因為在所得變動的總效果中，在單調正向轉換前後兩模型中的互相對應的兩小項的大小關係，分別是以下兩關係式的不等式左右兩邊的分項：

$$\frac{U_{xm}}{-A_{xx}} \gtrless \frac{V_{xm}}{-B_{xx}} = \frac{F'U_{xm}+F''U_xU_m}{-F'A_{xx}} = \frac{U_{xm}}{-A_{xx}} + \frac{F''U_xU_m}{-F'A_{xx}}, \tag{27}$$

$$\frac{pU_{mm}}{A_{xx}} \gtrless \frac{pV_{mm}}{B_{xx}} = \frac{pF'U_{mm}+pF''U_mU_m}{-F'A_{xx}} = \frac{pU_{mm}}{-A_{xx}} + \frac{pF''U_mU_m}{-F'A_{xx}}, \tag{28}$$

因此，除非 $F''=0$，則上面的兩關係式等號都會成立；但若 $F''=0$ 不成立，單調正向轉換前後，雖然所獲得的總效果一樣，但總效果的兩分項的數值可能會不一樣。其實，不只數值的大小可能會不一樣，連數值正負方向都可能會不一樣。

此結果表明這兩個分項是不能有實際經濟意義的，否則會在相同的偏好下對應出不同的行為，這麻煩可就大了。進一步說，如果兩個分項具有不同的實際經濟意義，則代表單調正向轉換前後的偏好是不一樣的，這表示必須放棄無異曲線的核心理論，這當然是避之惟恐不及的事，這當然是不可以接受的事。所以為了大我必須犧牲小我，也就是為了大局著想，總效果中的兩個分項是不能有實際經濟意義的。這項特性因此會限制 Pareto-Slutsky-Hicks-Allen 個人選擇模型所能刻畫的故事的豐富度，也限縮了模型的解釋能力與內涵的豐富性。

也就是在 Hicks 等人所發展與提倡的無異曲線分析法下，我們不能有貨幣的邊際效用遞增或遞減的概念的另一項更重要但一直被忽略的理由。因為在同一人的同一偏好下，偏好理論所要求的只是總效用數列數據的大小次序一樣即可，各個數據之間的差值與比率大小都沒有意義。因此在同一人的同一偏好下，即在總效用數列數據的大小次序一樣之下，只好允許會出現以下的三種不同的且互相排斥的狀況：貨幣邊際效用常數、貨幣邊際效用遞增、以及貨幣邊際效用遞減。

這其實就是讓 $U(x,m)$ 做單調正向轉換為 $V(x,m)=F(U(x,m))$ 時，所自然衍生出的特性。由於單調正向轉換會出現以下的關係：

(3) $$V_{xx}=F'U_{xx}+F''U_xU_x,\ V_{mm}=F'U_{mm}+F''U_mU_m,$$

單調正向轉換只要求 $F'>0$，而 $F''\gtreqless 0$ 的值是正、是負、或是零都是可以接受的，所以即使 $U(x,m)$ 與 $V(x,m)=F(U(x,m))$ 是表示相同的偏好，也代表同樣的行為，但很明顯的不只兩者個別對應的商品與貨幣邊際效用的變化率(U_{xx} 與 V_{xx}、以及 U_{mm} 與 V_{mm})的數值的大小可能會不一樣，連數值正負方向可能都會不一樣。例如，當 $U_{mm}<0$ 而 $F''>0$ 時，是可能出現 $V_{mm}>0$ 的情況的。也就是在同樣的偏好下，一個總效用對應出遞減的貨幣邊際效用，而另一個代表相同意義的總效用卻對應了完全相反的遞增的貨幣邊際效用。在無異曲線分析法中因此必須犧牲邊際效用遞增或遞減的概念。

因此，單調遞增轉換不影響比較靜態分析所獲得的最後的總結果，但可能改變總效果中的兩分項的效果的數值大小甚至是數值的正負。

我想你會想知道，個別分項不能有實質意義，會造成什麼影響呢？首先，這會限縮了模型的解釋能力與豐富度，因為我們不能由分項的特性(如貨幣邊際效用遞減的角度)

來解釋經濟現象與問題。我們必須放棄貨幣邊際效用遞減這種常識性的概念，否則就必須放棄無異曲線的理論。

接著，我想你還想知道，除了一些較豐富的意義如貨幣邊際效用遞減等概念不能有意義之外，會不會出現更糟糕的事呢？答案是會的，有時候會導致我們對實際現象做出錯誤或不恰當的解釋。我們以劣等品的解釋為例來加以說明。

在 Pareto-Slutsky-Hicks-Allen 的個人選擇理論中只能以所得變化的總效果來定義劣等品，也就是所得提高需求數量下降的物品($x_M < 0$)會被解釋為劣等品；而不能以所得提高使消費者對此商品的邊際效用下降(如$U_{xm} < 0$)的角度來定義劣等品。但以所得提高需求數量下降($x_M < 0$)的角度來定義劣等品是會出問題的。例如，在貨幣邊際效用遞增的情況下，即使所得提高會使商品的邊際效用增加(如$U_{xm} > 0$)，還是可能推導出所得增加而消費數量下降的情況。以 Slutsky-Hicks 的眼光來看，所得提高需求數量下降的物品($x_M < 0$)被稱為劣等品；但是，由另一角度來看，此時愈有錢時人們對此物品的邊際評價或效用是提高的，這時候稱此物品為劣等品是可能會出現違反常識的現象的，這可能是很荒謬的解釋。為什麼呢？

例如，我愈有錢時，我對高級 CD、或高檔餐廳的餐點、或高級服飾的喜歡程度一直都是愈高的，也就是，所得愈高我對這些商品的邊際效用的感受愈高。在一般的情況下，所得提高一方面使我的貨幣邊際效用下降，並且我對這些商品的邊際效用增加(如$U_{xm} > 0$)，所以我會消費更多的這些商品，這時候由$x_M < 0$與$U_{xm} < 0$的角度來定義劣等品都不會出問題。

但是，假設當我突然幸運中了統一發票的首獎 1000 萬元新台幣，我發現我有機會買得起房子了，存錢突然找到更好的理由了，此時所得提高會使我的貨幣邊際效用變成增加而非減少了，雖然所得提高時我對這些商品邊際效用還是增加，但是我卻消費了更少的這些高級商品，這時候由$x_M < 0$來看是劣等品，但是由$U_{xm} > 0$的角度來看，這些商品對我而言都是高貴的商品可不是劣等品。換句話說，此分析法有時候會讓經濟學家或經濟學生，將蘋果一刀切成橘子，把不是劣等品的高貴物品錯誤地詮釋為劣等品，這會曲解事實。[8]

因此，必須放棄邊際效用遞減等概念的理論，不是如一般經濟學家所認為的是建構消費者理論的充分理論，事實上，是會在解釋比較靜態的分析結果上，出現很大的紕漏。

這一點是在文獻上，不曾被提及的序數效用理論的嚴重缺陷。但是，即使經濟學家

[8] 詳細的說明，請參考林忠正(2014)刊登於《民報》的文章〈什麼是真正的蘋果橘子經濟學？淺談新古典經濟學的消費者選擇理論〉。

不瞭解此缺陷，但還是有很經濟學家不滿意序數效用理論排斥邊際效用遞減的基本天性，而使用與主張另一種效用可衡量的概念—基數效用理論。

3. 基數效用理論對「邊際效用遞減原則」代價昂貴的救援

基數效用的「**最基本的主張**」是個人有能力對不同選項組合進行偏好或效用排序，並且個人還有能力對任何兩個選項組合的變化的進行偏好或效用排序。一個基數效用函數經過任何正向線性轉換後所獲得的新函數可以描述相同的偏好次序，線性轉換前後不同的總效用的二次微分項的正負符號維持不變，基數效用理論因此可以接納邊際效用遞減法則(純粹的二次導數)的存在。

有些學者可能會因此認為，那邊際效用遞減法則在序數效用理論找不到生存空間的問題，就在基數效用理論出現之時獲得圓滿的解決了。反正，不需要用到邊際效用遞減法則進行應用分析的時候，就採用序數效用理論的消費者選擇的標準模型進行分析，或就宣稱自己所採用的在預算限制下極大化總效用的模型屬於序數效用理論；而在必須用到邊際效用遞減法則進行應用分析的時候，就採用基數效用理論的消費者選擇的標準模型進行分析，或就宣稱自己所採用的在預算限制下極大化總效用的模型屬於基數效用理論。我們現在有兩種不同的在偏好排序概念下所產生的效用理論，它們各有一些優點可以彌補彼此的缺點，所以在這兩種效用理論的通力合作之下，我們已經有完美的效用理論了。

這種看法，當然，是錯得十萬八千里的怪異論述。

因為，正向線性轉換就是公分與公尺等長度概念所具有的基本性質，基數效用正向線性轉換的特性因此隱含個人有能力分辨任何兩個效用差異(類似長度)的比例，此時效用變成一種相當強烈的可衡量的概念，效用可衡量一直被認為是一種落伍的不切實際的標誌。甚且，Samuelson (1938)指出在真實人生中構成基數效用所需添加的假設或公設出現的機率幾乎為零，因此以「無限地不可能的」(infinitely improbable)的極端負面字眼來傳達他對基數效用理論的論斷。

基數效用理論因此是一種非常不切實際的理論。我們也因此可以理解為何 Samuelson 會變成一位相當強硬的序數效用主義者。同樣地，我們也很難理解如果有人了解了基數效用這種幾乎不可能的特性之後，怎麼還會繼續採用基數效用理論來進行各

式各樣的應用分析的心態。因此，現在經濟文獻中不斷出現的極大化基數總效用的應用理論的現象，或許我們應該詮釋為現代的應用經濟學家並不瞭解這段序數與基數效用理論的發展史與相關概念。有興趣的讀者可以讀讀一些相關的文獻，就能更深刻地瞭解本文的論述。

在本節中，我就再次運用相同的五種數學表述方式，來說明邊際效用遞減法則在基數效用理論中所扮演的角色，以及所衍生的一些特性與爭議。

3.1 數據性例子

以一個簡單易懂的數據性例子，說明為何基數效用理論可以提供邊際效用遞減法則一處棲身之所的原因。

首先，如前所述，如果你對 5 顆蘋果的偏好超過 4 顆，對 4 顆蘋果的偏好超過 3 顆，對 3 顆蘋果的偏好超過 2 顆，對 2 顆蘋果的偏好超過 1 顆。你對 1 顆、2 顆、3 顆、4 顆、5 顆的蘋果總效用，可以用(1,2,3,4,5)的總效用數列來表示，其邊際效用是常數(1,1,1,1,1)。此時你對總效用序列 (1,2,3,4,5)，進行單調正向轉換如加以平方則總效用變成(1,4,9,16,25)，邊際效用變成遞增(1,3,5,7,9)；若進行如開根號的單調正向轉換則總效用變成$(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5})$，邊際效用則變成遞減$(1,\sqrt{2}-1,\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{4}-\sqrt{3},\sqrt{5}-\sqrt{4})$。

因此，我們下過結論說，單調轉換不會改變總效用的排序，但可能會改變邊際效用遞減的性質，因此不能保留邊際效用遞減的概念於序數效用理論的分析架構中。

但是如果你對總效用序列 (1,2,3,4,5)，只進行較具局限性的正向線性轉換如乘以 2，則總效用對應的變成(2,4,6,8,10)，此時對應的邊際效用還是維持不變常數(2,2,2,2,2)；若進行如加 1 的正向線性轉換則總效用變成(2,3,4,5,6)，其邊際效用仍是常數(1,1,1,1,1)；若進行乘以 2 再加 1 的正向線性轉換則總效用變成(3,5,7,9,11)，此時對應的邊際效用(2,2,2,2,2) 還是維持常數。所以，當原先的數列邊際效用是常數時，正向線性轉換後還是維持是常數。

結論是正向線性轉換不只不會改變總效用數值的排序，也不會改變邊際效用遞減的性質，所以基數效用能找回被序數效用趕出家門的邊際效用遞減法則。

3.2 一般化效用函數形式

我們接著以一般化的數學式，說明只能進行正向線性轉換的基數效用理論的性質。若我們對總效用 $U(x,m)$ 進行正向線性轉換使它變成 $V(x,m)$，如：

(29) $$V(x,m)=\alpha U(x,m)+\beta;\quad \alpha>0,\quad \beta \gtreqless 0,$$

則 $U(x,m)$ 與 $V(x,m)$ 此時代表相同的基數效用偏好(總效用差值的數列的數據大小次序相同)，這會衍生出以下的關係式：

(30) $$V_x=\alpha U_x,\ V_m=\alpha U_m,$$

(31) $$V_{xx}=\alpha U_{xx},\ V_{mm}=\alpha U_{mm},$$

相對於正向單調轉換之下總效用的二次微分項不能維持固定不變的性質，現在我們得到 $signV_{xx}=signU_{xx}$ 、$signV_{mm}=signU_{mm}$ 的結果，即正向線性轉換前後不同的總效用函數所對應的 U_{xx} 與 V_{xx} 的數值正負符號相同，並且 U_{mm} 與 V_{mm} 的數值正負也相同。因此，在效用函數只能進行正向線性轉換之下可救回被序數效用理論所拋棄的常識性的邊際效用遞減法則。

Lange (1934)曾經利用無異曲線圖形以很具體的圖像，來說明為何基數效用會隱含效用的可測性的這項事實。

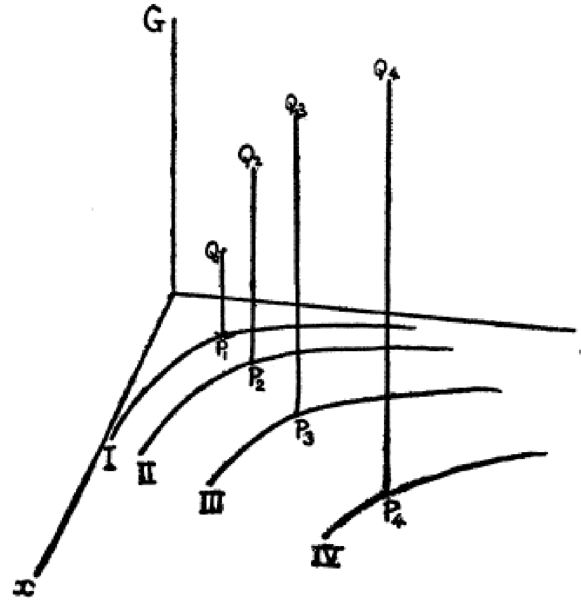
Lange 先令 I、II 和 III 來表示個人所能擁有的三種商品組合。並假設個人有能力分辨由組合 I 轉變至組合 II 的效用變化大於、等於或小於從組合 II 轉變至組合 III 的效用變化。此時，讓我們改變組合 III，直到個人認為，由 II 至 III 的效用變化剛好**等於**由 I 至 II 的效用變化。從組合 I 到組合 II 的變化以及從 II 至 III 因而是**等同的**(*equivalent*)。

很顯然地，在這種情況下，我們可以說，由於從 I 到 III 轉變的效用變化是由於 I 到 II 或 II 至 III 的兩倍。 Lange 藉由這樣的思維與推論方式，提出了一種可以構造出可確定的效用函數的途徑。

Lange 局限在只有兩種商品的情況，藉由一組無異曲線以圖形來呈現這一種可構造出可確定的效用函數的途徑。

首先，根據人們有能力對不同的商品組合進行偏好排序的假設，無異曲線所被標上的指數數值隨著偏好的方向增加，這是「人們有能力對不同的商品組合進行偏好排序的假設」所施加於效用指數的唯一條件。

接著，任意選取兩條無異曲線（以 I 和 II 來表示），讓我們找到第三條曲線以使得從曲線 II 至曲線 III 的過渡所產生效用增加恰好等於從曲線 I 到 II 的過渡所產生效用增加。根據我們的第二項基本公設，這種是可能的。我們稱這樣的曲線為**等同的**(*equivalent*)無異曲線。



現在藉由垂直線段(垂直線的高度)來代表其指數。由一個長度 B 的任意垂直線段（圖中 P_1Q_1 的線段）代表無異曲線 I 的指數以及由一個長度 A 的任意垂直線段代表曲線 II 和曲線 I 兩指數之間的差異。無異曲線 II 的指數因此可由長度 $B+A$ 的垂直線段（圖中 P_2Q_2 的線段）來表示。現在代表曲線 III 和曲線 II 的指數之間的差的垂直線段不再是任意的了。根據「人們有能力對不同的商品組合的移轉進行偏好排序的假設」，它必須是在長度上是等於 $P_2Q_2 - P_1Q_1$ 的線段，即等於 A。曲線 III 的指數，因此，必須以長度 $B+2A$ 的線段（圖中 P_3Q_3 的線段）來表示。如果我們現在要考慮另一個等同的無異曲線 IV，則代表其指數的垂直線段的長度應該是 $B+3A$（圖中 P_4Q_4 的線段）。

因此，從任何的無異曲線開始並考慮所有可能的等同的無異曲線，由剛剛所描述方式藉由垂直線段來表示其指數，以及沿著無異曲線移動垂直線段，這些線段的頂點會構成一個效用面。在這個表面只有兩個參數，A 固定度量單位和 B 固定測量的原(零)點，是任意的。這個表面 $G = G(x, y)$ 的方程式就是效用函數。

依據以上的研究發現，導致 Lange 做下基數效用是一種可衡量的概念的效用函數。事實上，Allen (1935)接著非常清楚地指出，正向線性轉換就是公分與公尺等長度概念所具有的基本性質。這表示基數效用是與長度的概念如公分與公尺一樣，是表示個人有能

力分辨任何兩個效用差異(類似長度)的比例，因此效用此時變成是一種相當強烈的可衡量的概念。

3.3 特殊效用函數形式

為加深不熟悉此研究題材的讀者的印象，接著我再以三個特殊的效用函數經過正向線性轉換來研究其相關性質。

這三個特殊的效用函數分別是：

(32-A) $V^1(x,m)=\alpha xm+\beta$,

(32-B) $V^2(x,m)=\alpha x^2m^2+\beta$,

(32-C) $V^3(x,m)=\alpha x^{1/2}m^{1/2}+\beta$,

這三個特殊效用函數分別是(4-A)-(4-C)的效用函數的正向線性轉換函數。

這三個模型的邊際效用分別是

(33-A) $V_x^1=\alpha m>0$, $V_m^1=\alpha x>0$；邊際效用為正

(33-B) $V_x^2=2\alpha xm^2>0$, $V_m^2=2\alpha x^2m>0$；邊際效用為正

(33-C) $V_x^3=\dfrac{1}{2}\alpha x^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}>0$, $V_m^3=\dfrac{1}{2}\alpha x^{\frac{1}{2}}m^{-\frac{1}{2}}>0$；邊際效用為正

對正向線性轉換前後的總效用函數所各自對應的邊際效用函數進行比較，我們會發現(5-A)與(33-A)的邊際效用都是正值，(5-B)與(33-B)的邊際效用也都是正值，連(5-C)與(33-C)的邊際效用都是正值，看來正向線性轉換不會改變邊際效用的正負符號。

三個效用函數所對應的邊際效用是遞減或遞增的情況，分別是：

(34-A) $V_{xx}^1=0$, $V_{mm}^1=0$；邊際效用常數

(34-B) $V_{xx}^2=2\alpha m^2>0$, $V_{mm}^2=2\alpha x^2>0$；邊際效用遞增

(34-C) $V^3_{xx} = -\dfrac{1}{4}\alpha x^{-\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} < 0$，$V^3_{mm} = -\dfrac{1}{4}\alpha x^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{3}{2}} < 0$ ；邊際效用遞減

對正向線性轉換前後的總效用函數所各自對應的二次微分項進行比較，我們會發現 (6-A)與(34-A)的邊際效用都是常數，(6-B)與(34-B)的邊際效用也都是遞增，(6-C)與(34-C)的邊際效用都是遞減，正向線性轉換因此也不會改變邊際效用常數、遞增、遞減的性質。

3.4 特殊效用函數的決策模型

接著我們在「消費者在預算限制下極大化總效用的分析架構」之下，分析這三個特殊模型所隱含的一些特性：

(35-A) $\max\limits_{x,m} \quad V^1(x,m) = \alpha x m + \beta \quad s.t. \quad px + qm = M, \quad q = 1,$

(35-B) $\max\limits_{x,m} \quad V^2(x,m) = \alpha x^2 m^2 + \beta \quad s.t. \quad px + qm = M, \quad q = 1,$

(35-C) $\max\limits_{x,m} \quad V^3(x,m) = \alpha x^{1/2} m^{1/2} + \beta \quad s.t. \quad px + qm = M, \quad q = 1,$

這三個模型的邊際效用雖然數值不同但其正負符號都是正值，它們所對應的邊際效用分別呈現常數、遞增或遞減的特性，這些結果已經記錄在上述的方程式(33-A)至(34-C)中了。

這三個模型所對應的邊際替代率分別是：

(36-A) $MRS^1_{xm} = \dfrac{V^1_x}{V^1_m} = \dfrac{\alpha m}{\alpha x} = \dfrac{m}{x},$

(36-B) $MRS^2_{xm} = \dfrac{V^2_x}{V^2_m} = \dfrac{2\alpha x m^2}{2\alpha x^2 m} = \dfrac{m}{x},$

(36-C) $MRS^3_{xm} = \dfrac{V^3_x}{V^3_m} = \dfrac{\frac{1}{2}\alpha x^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\alpha x^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}}} = \dfrac{m}{x},$

以上式子顯示三個不同模型的邊際替代率完全一樣。換句話說，正向線性轉換前後的總效用函數所各自對應的邊際替代率是維持不變。

因此，最適化的一階條件也完全一樣

(9-D) $$MRS_{xm}^{i}=\frac{m}{x}=\frac{p}{q}=p,\ i=1,2,3 \quad px+qm=M,\quad q=1,$$

因為邊際替代率完全一樣，最適化的二階條件也完全一樣，即無異曲線凸向原點的二階條件成立。

接著，我們可以求出三個不同模型完全一樣的需求函數，即：

(10-D) $$x^{*}=\frac{1}{2}\frac{M}{p},$$

(11-D) $$m^{*}=\frac{1}{2}\frac{M}{q}=\frac{1}{2}M,$$

此需求函數與(10)-(11)中的需求函數長得一模一樣。

簡單的說，前面的三個模型(7-A)-(7-C)與各自對應的後面的三個模型(35-A)-(35-C)的效用函數彼此為彼此的正向線性轉換函數，藉由簡單的分析我們發現正向線性轉換非但不會改變效用函數所描繪的偏好次序，即所對應的效用數值的相對大小不會發生改變，消費者均衡條件一樣，最適解(需求函數)一樣，呈現同樣的選擇或消費行為。並且前後對應的三個不同模型的邊際效用的正負符號維持不變：邊際效用常數的效用函數正向線性轉換後還是常數、邊際效用遞增的效用函數正向線性轉換後還是遞增、邊際效用遞減的效用函數正向線性轉換後還是遞減。

如果要保留「邊際效用遞減法則」，一個作法是放棄核心精神是效用只能排序的「序數效用」，而改採取只能進行線性轉換的基數效用即可。

3.5 一般化效用函數的決策模型

接著我們可以以一般化的消費者決策模型來完整地呈現整個論述，還未進行正向線性轉換的模型分析已經記錄在(12)-(17)的分析中了。在此，我們只需要分析正向線性轉換後的消費者模型。

而正向線性轉換$V(x,m)=\alpha U(x,m)+\beta$後的消費模型變成：

$$(37) \qquad \max_{x,m} \quad V(x,m) = \alpha U(x,m) + \beta,\ \ s.t. \quad px + qm = M,\ q = 1,$$

將預算限制式$m = M - px$，代入效用函數中，模型變成：

$$(38) \qquad \max_{x} \quad V(x, M - px) = \alpha U(x, M - px) + \beta,$$

令$B \equiv V(x, M - px)$，則最適化的一階條件可表示為：

$$(39) \qquad B_x = V_x(x, M - px) - pV_m(x, M - px) = 0 \ \text{ 或 } \ \frac{V_x(x, M - px)}{V_m(x, M - px)} = p,$$

內部解的二階條件要求：

$$(40) \qquad B_{xx} = V_{xx} - 2pV_{xm} + p^2 V_{mm} < 0,$$

簡單的計算可得所得變動對購買數量的效果為：

$$(41) \qquad x_M = \frac{V_{xm} - pV_{mm}}{-B_{xx}},$$

價格變動對購買數量的效果為：

$$(42) \qquad x_p = \frac{V_m + x(V_{xm} - pV_{mm})}{B_{xx}} \ 。$$

證明正向線性轉換前後的分析結果會一樣

首先，由正向線性轉換前的最適化一階條件$A_x = U_x - pU_m = 0$與轉換後$B_x = V_x - pV_m = 0$是完全相同的，因為：

$$(43) \qquad p = \frac{V_x}{V_m} = \frac{\alpha U_x}{\alpha U_m} = \frac{U_x}{U_m},$$

這表示，單調正向遞增轉換後的最適化條件不變，即最適解的數值不變。

接著，可以證明以下單調正向轉換前後兩個模型的分析結果會維持不變，藉由簡單的運算可證得：

(44) $$\frac{V_{xm}-pV_{mm}}{-B_{xx}}=\frac{\alpha(U_{xm}-pU_{mm})}{-\alpha A_{xx}}=\frac{U_{xm}-pU_{mm}}{-A_{xx}},$$

(45) $$\frac{V_{m}+x(V_{xm}-pV_{mm})}{B_{xx}}=\frac{\alpha U_{m}+\alpha x(U_{xm}-pU_{mm})}{\alpha A_{xx}}=\frac{U_{m}+x(U_{xm}-pU_{mm})}{A_{xx}},$$

其中，$B_{xx}=\alpha(U_{xx}-pU_{xm}-pU_{mx}+p^2U_{mm})=\alpha A_{xx}$。

因此我們藉由數學證明發現總效用函數經過正向線性轉換後，不會影響分析比較靜態分析的總結果。這就驗證了正向線性轉換前後的效用函數，表示相同的個人偏好。既然是代表相同的偏好，因此也應該隱含了相同的個人行為。

可救回邊際效用遞減法則

並且，必須進一步強調的，此時不只比較靜態分析的總結果一樣，連兩分項的正負方向與數值的大小也一樣。

這項事實，可以利用所得變動的效果作為例子來加以說明。在所得變動的總效果中，單調正向轉換前後兩模型中的互相對應的兩小項的大小關係分別會相等：

(46) $$\frac{V_{xm}}{-B_{xx}}=\frac{\alpha U_{xm}}{-\alpha A_{xx}}=\frac{U_{xm}}{-A_{xx}},$$

(47) $$\frac{pV_{mm}}{B_{xx}}=\frac{\alpha pU_{mm}}{-\alpha A_{xx}}=\frac{pU_{mm}}{-A_{xx}},$$

這因為 $F''=0$，正向線性轉換前後，所獲得的總效果一樣，而且總效果可分成兩項，而這兩分項的數值也是一樣。此結果表明這兩個分項可以有實際的經濟意義。

這會提高模型的解釋能力與豐富度，因為我們可由分項的特性(如貨幣邊際效用遞減的角度)來解釋經濟現象與問題。不會像在 Slutsky-Hicks 的個人選擇理論中只能以所得變化的總效果來定義劣等品，而可能將一些高貴的商品都詮釋成劣等品的怪異現象。

3.6 「無限地不可能的」可衡量的基數效用

但是， 有所得常有所失。效用函數只能進行正向線性轉換的基數效用概念，也有其明顯的重大限制。正如 Allen (1935)所正確指出地，正向線性轉換公式中的一個參數 α，對應於長度測量概念中的「測量單位」(unit of measurement)，而另一個參數 β，對應於長度測量概念中的「零標記」(zero mark)。因此正向線性轉換就是長度概念所具有的基本性質，基數效用是與長度的概念如公分與公尺一樣的可衡量概念，因此基數效用理論

等於走回古典的效用可衡量的已被拋棄的不受歡迎的老路。另外，透過數學模型的分析，Samuelson (1938)明確地發現為了得到(正向線性轉換)基數效用理論所再添加的假設太強烈，因此認為人們的偏好可以以這樣的效用函數來加以刻畫的條件在現實世界中可被滿足的機率是幾近於零，他以「無限地不可思議的」或「無限地不可能的」(infinitely improbable)的強烈字眼來批評基數效用理論的概念。

序數效用理論與基數效用理論各有嚴重缺失，使得現代效用理論陷入兩難的困境之中。[9]就如 Bernardelli (1934)所說的「**此時經濟學到達了十字路口 (**At this point economics reaches cross roads.**)**，或 Bernardelli (1952)所說的「但這…導致了一個非常尷尬的兩難困境。」 (But this … leads to a very awkward dilemma.)。一是勉強地採取序數效用理論的觀點，此時效用具有只能排序大小的優點，而不會像長度一樣是可以衡量的缺點，但必須放棄一些被廣泛接受的邊際效用遞減等觀念以及建構在其上的相關古典理論，這是一種主張「截肢」的怪異理論；二是無奈地採取基數效用理論的觀點，此時可以保留被廣泛接受的邊際效用遞減等觀念與對應的相關古典理論，但必須接受效用像長度一樣是可以衡量的非常強烈的概念，而走回古典效用理論效用可衡量的老路。這兩條理論的道路都是有很大缺失的理論大道。

4. 結論

總結而言，現代兩種主要效用理論都有嚴重的缺失，而如何建構一套具有這兩種效用理論的優點而無缺點的兩全其美的新效用理論的任務，仍然有待努力，甚至看來是一項不可能的任務。由於效用理論是個體選擇理論的基礎，個體選擇理論是現代其他目不暇給的經濟理論的基礎，位於最根基性的效用理論存在重大缺陷，這表示現代龐大的經濟理論體系是建構在不穩定的地基之上。此文的目的很單純，主要希望運用多種簡單的數學表述方式，來幫助不熟悉此問題的讀者深刻地了解與體認到現代效用理論與個體理論所面對的基本困境。

由 Pareto、Slutsky、Allen、Hicks、Samuelson 以及其他很多參與基礎理論建構與討論的偉大經濟學家所發動與鼓吹的序數總效用理論，因此並沒有真正成功地實現序數效用革命的長期夢想或理想。

---

[9] 簡單回顧序數效用理論與基數效用理論的簡單發展史，可以促進與加深讀者對此問題的了解。有興趣的讀者，可以讀讀林忠正(2015) 介紹序數與基數效用理論發展史的論文與其他著作。

效用是序數的概念是對的，但邊際效用遞減等概念也是對的，這兩項正確的概念不能並存，這表示序數效用革命的立足點可能出了問題，也就是序數效用可能適用於不恰當的對象(指應該直接用在邊際效用而非總效用上)，可能序數效用理論的出發點假設或第一項假設就出了差錯，因而一開始就走上錯誤的價值理論的重建道路。

當時參與序數與基數效用理論相關爭論的 Bernardelli (1938)就曾感慨地指出：「心理測量的問題及其對經濟理論的影響至今已被證明是最令人費解的謎團之一」(the problem of psychological measurement and its bearing on economic theory so far has proved to be one of the most puzzling riddles)。其實，不只在當時這是最大的一個謎團，這個謎團至今還未被成功地破解，正如最近 2014 年發表於經濟史期刊《政治經濟學史》(*History of Political Economy*)的一篇文章，作者 Hudík (2014, p.690)於文章結語中說：「最近試圖建構…的消費理論是否會導致重新引入邊際效用於消費行為的分析之中…。截至今天，這個問題仍然是處於等待解答的狀態。」(the question whether recent attempts to construct … consumer theory will lead to a reintroduction of marginal utility into analyses of consumer behavior… As of today, this question still open.)目前似乎大家已經將使用具有重大爭議的理論來進行應用分析的現象視為見怪不怪或當成理所當然的事了。

這一項非常重要的待解之謎，還是在等待經濟學的英雄人物來幫邊際效用遞減法則在序數(邊際)效用的家中找到合情合理的容身之地。效用理論是經濟學選擇理論的基石，解開此謎團，可能會從根本開始再次重新建構經濟學的個體選擇理論與後續的目不暇給的龐大經濟理論。

【附錄】證明單調正向轉換前後模型的分析(總)結果一樣

首先，證明下述兩項的結果應該會一樣：

(16) $$x_M = \frac{U_{xm} - pU_{mm}}{-A_{xx}},$$

(22) $$x_M = \frac{V_{xm} - pV_{mm}}{-B_{xx}},$$

證明過程非常簡單，就先分成分母與分子兩部分。首先，在分母部分：

$$B_{xx} = V_{xx} - pV_{xm} - pV_{mx} + p^2 V_{mm}$$

將 $V_{xx} = F'U_{xx} + F''U_x U_x$、$V_{xm} = F'U_{xm} + F''U_x U_m$、$V_{mm} = F'U_{mm} + F''U_m U_m$ 與 $V_{mx} = F'U_{mx} + F''U_m U_x$ 的關係代入上式，可得：

$$B_{xx} = (F'U_{xx} + F''U_x U_x) - p(F'U_{xm} + F''U_x U_m) - p(F'U_{mx} + F''U_m U_x) + p^2 (F'U_{mm} + F''U_m U_m)$$

接著，進行分項整理，

$$B_{xx} = (F'U_{xx} - pF'U_{xm} - pF'U_{mx} + p^2 F'U_{mm}) + (F''U_x U_x - pF''U_x U_m - pF''U_m U_x + p^2 F''U_m U_m)$$

$$B_{xx} = F'(U_{xx} - pU_{xm} - pU_{mx} + p^2 U_{mm}) + F''(U_x U_x - pU_x U_m - pU_m U_x + p^2 U_m U_m)$$

將一階條件 $V_x = pV_m$ 代入上式，可得：

$$p = \frac{V_x}{V_m} = \frac{F'U_x}{F'U_m} = \frac{U_x}{U_m}$$

所以，

$$B_{xx} = F'(U_{xx} - pU_{xm} - pU_{mx} + p^2 U_{mm}) + F''(U_x U_x - \frac{U_x}{U_m} U_x U_m - \frac{U_x}{U_m} U_m U_x + \frac{U_x}{U_m} \frac{U_x}{U_m} U_m U_m)$$

$$B_{xx} = F'(U_{xx} - pU_{xm} - pU_{mx} + p^2 U_{mm}) + F''(U_x U_x - U_x U_x - U_x U_x + U_x U_x)$$

最後整理可得：

$$B_{xx} = F'(U_{xx} - pU_{xm} - pU_{mx} + p^2 U_{mm}) = F'A_{xx}$$

其次，在分子部分，令$K=V_{xm}-pV_{mm}$，且將一階條件$V_x=pV_m$代入，可得：

$$K=V_{xm}-pV_{mm}=V_{xm}-\frac{V_x}{V_m}V_{mm}=\frac{1}{V_m}(V_mV_{xm}-V_xV_{mm})$$

$$K=\frac{1}{F'U_m}[F'U_m(F'U_{xm}+F''U_xU_m)-F'U_x(F'U_{mm}+F''U_mU_m)]$$

$$K=\frac{1}{F'U_m}(F'U_mF'U_{xm}-F'U_xF'U_{mm}+F'U_mF''U_xU_m-F'U_xF''U_mU_m)$$

$$K=\frac{1}{F'U_m}(F'U_mF'U_{xm}-F'U_xF'U_{mm})$$

$$K=\frac{F'}{U_m}(U_mU_{xm}-U_xU_{mm})$$

$$K=F'(U_{xm}-\frac{U_x}{U_m}U_{mm})$$

將一階條件$U_x=pU_m$代入上式，可得：

$$K=F'(U_{xm}-pU_{mm})$$

整理上述結果，可發現：

$$\frac{V_{xm}-pV_{mm}}{-B_{xx}}=\frac{F'(U_{xm}-pU_{mm})}{-F'A_{xx}}=\frac{U_{xm}-pU_{mm}}{-A_{xx}}$$

同理，下列兩項的結果也是一樣的。

(17) $$x_p=\frac{-U_m-x(U_{xm}+pU_{mm})}{-A_{xx}},$$

(23) $$x_p=\frac{-V_m-x(V_{xm}+pV_{mm})}{-B_{xx}}$$ 。

Reference

林忠正，(2014)，「什麼是真正的蘋果橘子經濟學？淺談新古典經濟學的消費者選擇理論」，民報。

林忠正，(2015a)，《古典可測量的效用理論的故事》，撰寫中專書

林忠正，(2015b)，《序數效用理論的故事》，撰寫中專書

林忠正，(2015c)，《基數效用理論的故事》，撰寫中專書

林忠正，(2015d)，〈序數與基數效用理論簡史 I：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(1)，研討論文。

林忠正，(2015e)，〈序數與基數效用理論簡史 II：為何陷入兩難困境的效用理論必須重建？〉，跨界得與失的序數邊際效用分析法(2)，研討論文。

邢慕寰譯，(1967)，《價值與資本》(*Value and Capital*)，台北市：台灣銀行經濟研究室。

Allen, R.G.D. (1935) "A Note on the Determinateness of the Utility Function," *Review of Economic Studies*, 2, pp. 155–158.

Bernardelli, H. (1934) "Notes on the Determinateness of the Utility Function: II," *Review of Economic Studies*, 2, pp. 69–75.

Bernardelli, H. (1938) "The End of the Marginal Utility Theory?," *Economica*, 5:18, pp. 192-212.

Bernardelli, H. (1952) "A Rehabilitation of the Classical Theory of Marginal Utility," *Economica*, 19:75, pp. 254-268.

Hicks, J.R. (1939) *Value and Capital: An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*, Oxford: Clarendon Press.

Hudík, M. (2014) "Reference-Dependence and Marginal Utility: Alt, Samuelson, and Bernardelli," *History of Political Economy*, 46:4, pp. 677-693.

Jehle, G.A. and P.J. Reny (2011) *Advanced Microeconomic Theory*, Pearson Education India.

Lancaster, K. (1953) "A Refutation of Mr. Bernardelli," *Economica*, 19, pp. 259–262.

Lange, O. (1934) “The Determinateness of the Utility Function,” *Review of Economic Studies*, 1, pp. 218–25.

Rothbard, M. (1956) “Toward a Reconstruction of Utility and Welfare Economics,” in Mary Sennholz ed., (Princeton, N.J: D. Van Nostrand, 1956). Reprinted in *The Logic of Action One: Method, Money, and the Austrian School* by Murray N. Rothbard (London: Edward Elgar, 1997, pp. 211-255. Mises.org’s online edition copyright.

Samuelson, P.A. (1938) “The Numerical Representation of Ordered Classifications and the Concept of Utility,” *Review of Economic Studies*, 6, pp. 65–70.

Silberberg, E. (1978) *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, McGraw-Hill.

Varian, H.R. (1996) *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*, W&W Norton.